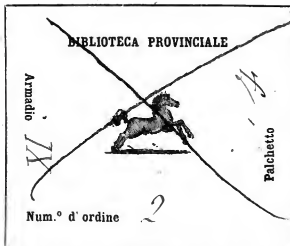
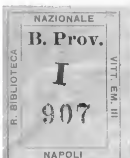

FONDO PIZZOFALCONE


BIBLIOTECA PROVINCIALE
Armadio IX
Palchetto
Num.° d' ordine 2




NAZIONALE
B. Prov.
I
907
R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III
NAPOLI

# TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

## DU

# CALCUL DES PROBABILITÉS;

Par S. F. LACROIX.

Il ne faut pas recevoir les opinions de nos pères comme des enfans, par la seule raison que nos pères les ont eues.

(*Pensées de Marc-Aurèle*, trad. de Joly, ch. 19, § 29.)





PARIS,

Chez Mme Ve COURCIER, Impr.-Lib. pour les Mathématiques et la Marine, quai des Augustins, n° 57.

1816.



# AVERTISSEMENT.

Le Calcul des Probabilités, inventé par Pascal et Fermat, n'a pas cessé depuis d'exciter l'intérêt et d'exercer la sagacité de leurs plus illustres successeurs; mais les élémens de cette branche des Mathématiques appliquées, sont restés bien en arrière de l'état de la science. Après quelques ouvrages superficiels ou incomplets, on ne trouve plus que des Mémoires académiques ou des Traités fondés sur les parties les plus élevées de l'analyse; ensorte que, même avec des connaissances assez étendues dans les Mathématiques élémentaires, il faut encore se borner à croire sur parole, la vérité des points fondamentaux de la théorie des probabilités, qui peut cependant s'établir d'une manière très-solide par le seul secours des élémens d'Algèbre. C'est pour remplir cette lacune, que j'ai rédigé le Traité que j'offre en ce moment au public. Dans le texte, je ne suppose presque rien au-delà de ce que contiennent mes *Élémens d'Algèbre*. De plus, j'ai eu soin de mettre en évidence les énoncés des principes, et de multiplier les résumés, afin qu'on pût encore acquérir une idée de la théorie, indépendamment des formules algébriques. Enfin, pour

rendre plus facile le passage de ce Traité, à ceux où l'on a déployé toutes les ressources de l'analyse transcendante, je l'ai terminé par quelques Notes, où, partant de formules contenues dans mon *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, j'ai exposé les premières applications de ces calculs aux problèmes concernant les probabilités.

Les nombreuses citations que j'ai faites des écrits originaux donneront aux lecteurs les moyens de suivre la marche de cette doctrine depuis son invention, et d'en approfondir les détails et les applications aux sciences morales et politiques, applications dont j'ai indiqué les bases, et que j'ai tâché d'apprécier à leur juste valeur. Condorcet desirait que leur ensemble fît la matière de l'un des cours des Écoles publiques; et il en a donné deux excellens programmes, le premier à la suite de ses *Mémoires sur l'Instruction publique*, t. IX de ses *Œuvres*, p. 566, et le second dans le *Tableau général de la science qui a pour objet l'application du calcul aux sciences politiques et morales*, t. XXI de ses *Œuvres*, p. 257, ou *Elémens du Calcul des Probabilités*, p. 171.

# TABLE.

[OBSERVATION. Le plus grand nombre des articles indiqués dans cette Table, se compose de ceux qui contiennent les énoncés des propositions fondamentales ou des résumés dégagés des calculs algébriques ; les autres articles sont distingués par un astérisque.]

FIN DE LA TABLE.

# TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE

DU

# CALCUL DES PROBABILITÉS.

## *Notions préliminaires sur le sens des mots* CERTITUDE *et* PROBABILITÉ.

1. LA *conscience* d'une sensation actuelle, la *perception* instantanée et avec pleine évidence de la convenance ou de la disconvenance de deux idées : voilà où se trouve, sous le double rapport de nos facultés physiques et intellectuelles, le plus haut degré de certitude, la *certitude absolue;* bien entendu qu'il faut écarter de la sensation les jugemens dont on pourrait l'accompagner pour prononcer sur sa cause, ou la rapporter à un objet particulier, et de la comparaison des idées, tout ce qui ne se réduirait pas à des idées simples et tellement circonscrites, que l'entendement puisse les embrasser d'une seule vue (*).

(*) En employant les mots *facultés physiques* et *intellectuelles*, je n'ai en vue que de me conformer à la division établie par le langage ordinaire dans nos facultés, sans rien préjuger sur leur origine et connexion.

C'est en vain que les philosophes ont cherché pendant long-tems un *criterium* de vérité, différent de la parfaite intuition que je viens de rappeler; puisqu'au bout des plus longues explications, il faut toujours en venir à reconnaître dans l'esprit la faculté de saisir immédiatement l'accord ou la convenance de deux idées ou de deux notions. Aussi tous leurs efforts, quand ils les ont bien dirigés, n'ont servi qu'à les ramener à ce terme avoué maintenant par tous les bons esprits, qui paraissent convaincus que le seul objet des règles essentielles du raisonnement est de prévenir toute illusion dans le jugement que nous portons de cette évidence, en examinant avec soin l'étendue que reçoit chaque idée dans les diverses combinaisons qu'on en fait, et en contrôlant sans cesse la vérité de nos souvenirs et l'exactitude de nos énumérations. C'est en effet à cela que se réduisent les fameuses règles de Descartes, auxquelles on n'a rien ajouté d'essentiel (*).

(*) Il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici ces règles, et d'y joindre celles que Newton a prescrites pour les recherches physiques, parce que dans la suite nous aurons occasion d'en tirer des conséquences pour le sujet qui nous occupe.

*Règles de Descartes.* (*Discours de la Méthode*, éd. de 1637, p. 20.)

1°. « Ne recevoir jamais aucune chose pour vraie que je ne la
» connusse évidemment être telle: c'est-à-dire, éviter soigneuse-
» ment la précipitation, et la prévention; et ne rien comprendre
» de plus en mes jugemens, que ce qui se présenterait si claire-
» ment et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune
» occasion de le mettre en doute.

2°. » Diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant
» de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux
» résoudre.

3°. » Conduire par ordre mes pensées, en commençant par les
» objets les plus simples, et les plus aisés à connaître, pour monter
» peu à peu comme par degrés, jusques à la connaissance des plus

2. Des sensations et des jugemens simples confiés à notre mémoire, naissent des séries de conséquences dont la certitude dépend d'un nouvel élément, la fidélité avec laquelle cette mémoire nous rend ce que nous avons éprouvé. La confiance que nous acquérons à cet égard, n'est fondée que sur la constante répétition du fait, et sur l'assurance que cette répétition nous donne de son renouvellement chaque fois que nous le désirerons ou que les circonstances l'exigeront. Ici se montre un penchant ou une loi de l'esprit humain, la tendance générale à croire au retour des faits que nous avons observés plusieurs fois sur nous ou sur les autres objets, penchant qui se lie à l'opinion que nous acquérons bientôt de la constance des lois de la nature.

Ces propositions : *Tout homme mourra ; le soleil se levera demain ; j'ai suivi telle démonstration, j'en*

---

» composés ; et en supposant même de l'ordre entre ceux qui ne » se précèdent point naturellement les uns les autres.

4°. » Faire partout des dénombremens si entiers, et des revues » si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre. »

---

*Règles de Newton.* (Traduction de ses *Principes*, par Mme du Chastelet, tom. II, pag. 2.)

1°. « Il ne faut admettre de causes que celles qui sont néces» saires pour expliquer les phénomènes.

2°. » Les effets du même genre doivent toujours être attribués, » autant qu'il est possible, à la même cause.

3°. » Les qualités des corps qui ne sont susceptibles ni d'aug» mentation ni de diminution, et qui appartiennent à tous les corps » sur lesquels on peut faire des expériences, doivent être regardées » comme appartenantes à tous les corps en général.

4°. » Dans la philosophie expérimentale, les propositions tirées » par induction des phénomènes, doivent être regardées, malgré » les hypothèses contraires, comme exactement ou à peu près vraies, » jusqu'à ce que quelques autres phénomènes les confirment en» tièrement ou fassent voir qu'elles sont sujettes à exception. »

*ai trouvé toutes les parties exactes, et j'ai la conviction de la vérité énoncée*, n'ont pas d'autre fondement.

Tant de faits, auxquels on n'a pu jusqu'ici en opposer aucun de bien constaté, ont vérifié la mortalité de l'espèce humaine; le soleil s'est levé un si grand nombre de fois; tout homme, reconnu en état de santé, et doué d'une intelligence saine, a si constamment senti, quand il à voulu y revenir, la vérité de chacun des jugemens simples qui composent une démonstration, qu'on ne forme aucun doute sur la répétition de ces événemens, quoiqu'on ne puisse s'empêcher d'y reconnaître une différence essentielle avec la conscience d'une sensation ou l'intuition d'un jugement porté sur deux idées simples dont la connexion est évidente. Aussi le degré de certitude acquis par cette voie, est-il bien près de la certitude absolue; cependant quelle garantie avons-nous qu'une loi naturelle, qui ne s'est pas encore développée à nos yeux, ne modifiera pas la succession de ces faits répétés un nombre presqu'infini de fois, mais pourtant sans que nous ayons pu saisir la manière d'agir des causes qui les produisent, ou la nécessité de leur dépendance réciproque (*).

3. Si des faits auxquels nous ne connaissons encore aucune exception, nous passons à d'autres qui nous en ont offert, nous verrons le doute s'introduire dans notre esprit, par des nuances de plus en plus fortes. Quand il s'agira, par exemple, de nous en rapporter aux témoignages des autres; la multitude d'erreurs involontaires et de mensonges prémédités, rendra très-circonspect l'homme de sens dans son acquiescement aux informations qui lui seront données. Chaque fait qu'il

(*) *Voyez* dans les *Essais philosophiques* de Hume, ses réflexions sur les idées de *liaison* et de *pouvoir*.

aura pu vérifier par lui-même, ou qui, ne sortant pas du train habituel des choses, n'aura été le sujet d'aucune réclamation, établira dans son esprit la validité des témoignages; mais les déceptions l'ébranleront d'autant plus qu'elles seront plus répétées. Il balancera les uns avec les autres, les résultats contraires, demeurera souvent en suspens; et s'il est forcé de prendre un parti, il ne le prendra que dans le sens où les autorités lui paraîtront plus nombreuses, mieux d'accord entre elles, plus conformes à ses observations ou aux faits bien avérés.

Un observateur qui a remarqué les fréquentes coïncidences de la chute de la pluie, avec l'abaissement du mercure dans le baromètre, avec le règne de certains vents, avec un certain état des nuages, lorsqu'il verra le concours de tous ces indices, regardera la pluie comme prochaine, sans pouvoir assurer néanmoins que le fait arrivera infailliblement; car il se rappellera en même tems que ces apparences ont été quelquefois trompeuses, que le mercure a baissé dans le baromètre et que le tems a été couvert sans qu'il ait plu, que des vents ou des courans supérieurs inaperçus, ou d'autres modifications de l'air ont dissipé les nuages les plus menaçans: mais il aura une confiance d'autant plus grande dans l'arrivée de la pluie, que la comparaison des faits conformes à sa conjecture avec les faits contraires, lui donnera lieu de former un plus grand nombre de jugemens pour l'affirmer que pour la nier.

L'événement qui est ici la chute de la pluie, quoique douteux pour celui qui en observe les indices, n'est point lui-même livré au hasard; il résulte de l'état antérieur et présent de l'atmosphère et des conséquences nécessaires de cet état. Une intelligence supérieure qui en saisirait toutes les conditions, en conclurait tout de suite

ce qui doit arriver : l'homme, borné dans ses connaissances, ne pouvant démêler les conditions premières qui établissent la nécessité de l'événement, ou n'en pouvant faire une énumération exacte, récapitule les indices qui lui en tiennent lieu; et si, dans cette opération, les jugemens successifs qu'il porte, sont plus fréquemment affirmatifs que négatifs, « la vue de son esprit (dit » Hume) revient donc plus fréquemment sur un événement que sur son contraire. C'est cette concentration » de plusieurs vues dans un seul événement qui produit, par un mécanisme inexplicable de la nature, » le sentiment de croyance : c'est par là qu'un événement triomphe de son antagoniste, qui a moins de » ces vues pour lui, et qui revient plus rarement à » l'esprit (*). »

4. L'exemple développé ci-dessus est de ceux où les jugemens se forment immédiatement sur des indices tirés de l'expérience; mais c'est encore le même procédé lorsque la chaîne des raisonnemens est plus longue.

Dès que le sujet n'offre pas toutes les conditions nécessaires pour arriver à la certitude d'une démonstration, on ne saurait plus faire qu'un examen de toutes celles de ses conditions qui sont connues, en peser l'importance, en considérer le nombre. S'agit-il, par exemple, d'une question de critique littéraire, comme de déterminer si un ouvrage est bien de l'auteur dont il porte le nom ; il faut puiser d'abord dans la discussion des faits et des témoignages, dans la comparaison des formes du style, tous les indices qui sont favorables et ceux qui sont contraires à l'attribution supposée. Si d'un côté aucune des circonstances, ne présentant de contradiction manifeste, n'établit l'impossibilité absolue

(*) *Essais philosophiques* de Hume, *sur la Probabilité.*

du fait avancé, et de l'autre si toutes les affirmations ne portent que sur des énumérations qu'on puisse démontrer incomplètes, ou auxquelles on puisse trouver des modifications, il ne résultera de tout le travail qu'un assemblage de jugemens affirmatifs et de jugemens négatifs, qui produiront un effet proportionné à leur nombre ou à leur force, si d'ailleurs celui qui fait l'examen a soin de se garantir de toute illusion et n'a pas pris son parti d'avance.

Ici se présente la distinction de la force des indices et de leur nombre : mais presque toujours la première qualité se ramène à la seconde ; car qu'est-ce qu'un indice plus fort? C'est celui qui trompe le moins souvent, qui par conséquent embrasse un plus grand nombre de cas favorables à la production de l'événement qu'il annonce, ou des développemens duquel il sort un plus grand nombre de circonstances qui ramènent à la même conclusion. En suivant ce raisonnement on voit que dès que l'esprit humain ne peut plus rencontrer la certitude, la marche du raisonnement prend la forme d'une sorte de calcul dont le résultat acquiert de l'empire sur notre croyance, précisément par l'effet de la répétition des jugemens ou des observations. La bonté de ce calcul dépend ici, comme partout, du choix des données, et ensuite, du bon emploi qu'on en fait; et ce bon emploi ne peut consister que dans l'examen le plus détaillé des circonstances de chaque donnée, dans le soin de les décomposer autant qu'il est possible, afin de n'avoir à prononcer que sur des propositions d'une égale simplicité et d'une égale évidence, et surtout de tenir son esprit en garde contre toute partialité en faveur du résultat quel qu'il puisse être.

5. Il n'y aurait rien à desirer si on pouvait amener les choses au point qu'il y eût une parité exacte avec

le jet d'un *dé* comprenant un certain nombre de faces marquées de couleurs ou de points divers. Si la figure de ce dé était bien régulière, sa matière bien homogène, les circonstances de son jet bien variées, bien imprévues, ensorte qu'on n'eût aucune raison de s'attendre à le voir tomber sur une face plutôt que sur toute autre, et qu'il y en eût, par exemple, cinq blanches et une noire, l'esprit, trouvant le nombre des faces blanches plus grand que celui des faces noires, reviendrait plus fréquemment à juger possible l'arrivée de l'une des premières que celle de la dernière; et par l'effet de cette répétition du *jugement de possibilité*, comme je l'ai déjà dit d'après Hume et Condorcet, croirait plutôt à l'arrivée d'une face blanche qu'à celle d'une face noire. Ce que tout esprit tant soit peu éclairé ne peut manquer de sentir dans l'exemple précédent, frapperait les plus ignorans, si, au lieu d'un dé à six faces, on en supposait un ayant un million de faces blanches et une seule noire, ou bien une urne contenant un million de boules blanches et une seule noire. Dans ce cas, on ne pourrait s'empêcher d'attendre avec une très-grande confiance, l'arrivée d'une face ou d'une boule blanche, et de marquer une très-grande surprise si c'était la face ou la boule noire qui se présentât : or, on verra bientôt que le calcul rattache le premier cas au second.

Je ferai remarquer à cette occasion que si c'est le sentiment de la constance des lois de la nature qui fonde notre confiance dans le retour des événemens observés un grand nombre de fois, c'est encore ce même sentiment qui fonde notre incertitude, notre indifférence d'opinion sur les chances offertes par les instrumens aléatoires bien construits et fidèlement employés; car c'est parce qu'il résulte de la constance des lois de la nature,

que quand toutes les circonstances déterminantes sont les mêmes, les effets sont aussi les mêmes, que ceux-ci doivent être différens toutes les fois que les premières varient; et c'est aussi à les varier que nous nous appliquons dans la production des événemens des jeux de hasard. On évite, par exemple, de mettre le dé dans le cornet sur la même face, de mesurer les mouvemens qu'on donne à ce cornet; on cherche à prendre une manière très-irrégulière de remuer les urnes contenant les numéros, ou de mêler les jeux de cartes. De même l'irrégularité du mouvement de nos membres, lorsqu'il n'est pas dirigé par une habitude bien prise, transforme d'abord les jeux d'adresse en jeux de hasard; mais à mesure que l'une s'acquiert, les chances de l'autre diminuent.

6. Il est donc bien vrai de dire, « qu'il n'y a » point de hasard, à proprement parler, mais qu'il y » a son équivalent : l'ignorance où nous sommes des » vraies causes des événemens » (*), d'où naît la *probabilité* quand nous ne pouvons énumérer exactement les causes, ou prévoir infailliblement leurs effets. Le cas le plus simple est bien évidemment celui où le nombre de ces effets est connu et où chacun d'eux est également possible : tel est le cas du dé. Le nombre des jugemens que l'on peut former pour l'arrivée d'une certaine couleur, étant le même que celui des faces de cette couleur, ce dernier détermine le degré de confiance avec laquelle on attend l'apparition de l'une de ces faces; puisque si on en augmentait le nombre, le degré de confiance augmenterait aussi. Mais ce n'est pas le nombre absolu qu'il faut considérer dans cette circonstance; car si le nombre des faces noires du dé augmentait en même tems que celui des faces blanches, que l'un et l'autre

(*) *Essais* de Hume, *sur la Probabilité*.

fussent doublés, par exemple ; la proportion des jugemens affirmatifs et des négatifs, relativement à l'arrivée d'une certaine couleur, demeurant la même, on ne voit pas pourquoi le degré de confiance dans l'arrivée de l'événement désigné, changerait. Sur dix faces blanches et deux faces noires, on pourrait encore former 5 jugemens en faveur de la couleur blanche, contre un seul pour la couleur noire.

Il suit de là, que la mesure du degré de confiance dans l'arrivée d'une couleur, doit être le rapport du nombre des jugemens affirmatifs, au nombre des jugemens tant affirmatifs que négatifs, c'est-à-dire à leur nombre total, ou bien le rapport du nombre de faces de la couleur que l'on considère, au nombre total des faces ; c'est-à-dire $\frac{5}{6}$ pour la couleur blanche dans le dé proposé.

Ce rapport est ce qu'on appelle la *probabilité mathématique*, *qui se forme*, comme on voit, *en divisant le nombre de chances favorables à l'événement, par le nombre total des chances.* Mais il faut bien faire attention que toutes les chances comparées soient également possibles. Le jet des dés va nous donner le moyen de rendre bien évidente la nécessité de cette restriction.

7. Lorsqu'on jette à la fois deux dés ayant six faces marquées chacune de l'un des nombres depuis 1 jusqu'à 6 inclusivement, pour peu qu'on réfléchisse sur ce qui doit arriver, on reconnaît que chacune des faces de l'un des dés peut se montrer avec chacune des faces de l'autre, ensorte que si on désigne le premier par $A$, le second par $B$, on aura les 36 chances indiquées dans le Tableau suivant.

| *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* | *A* | *B* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 1 | 5 | 1 | 6 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 5 | 2 | 6 | 2 |
| 1 | 3 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 | 3 | 5 | 3 | 6 | 3 |
| 1 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 4 | 6 | 4 |
| 1 | 5 | 2 | 5 | 3 | 5 | 4 | 5 | 5 | 5 | 6 | 5 |
| 1 | 6 | 2 | 6 | 3 | 6 | 4 | 6 | 5 | 6 | 6 | 6 |

Toutes les combinaisons marquées dans ce Tableau sont des chances également possibles, tant que l'on considère isolément chaque dé. Ainsi amener 5 avec le dé *A* et 2 avec le dé *B*, est une chance pareille à celle d'amener 6 avec l'un et l'autre en même tems; mais si on attend l'arrivée des points 2 et 5 sans distinction d'ordre, la possibilité de l'obtenir sera différente de celle d'amener 6, 6 ou le *sonnez*, puisque la première condition sera également remplie par la chance 2, 5 et la chance 5, 2, tandis que 6, 6 ne se trouve qu'une seule fois parmi les 36 combinaisons également possibles des faces de ces dés. Ainsi, suivant la définition donnée ci-dessus, la probabilité d'amener les points 5 et 2 sans distinction d'ordre est $\frac{2}{36}$ ou $\frac{1}{18}$, et celle d'amener 6, 6 ou du sonnez, est seulement $\frac{1}{36}$.

Si l'événement desiré était, non pas l'arrivée des points considérés chacun à part, mais celle du nombre marqué par ces points pris collectivement, on trouverait des possibilités très-diverses. Par exemple, le nombre 2 ne pourrait s'obtenir que d'une seule manière, savoir, par la chance 1, 1; le nombre 7, au contraire, résulterait de six chances différentes, savoir :

| 1 6 | 6 1 | 2 5 | 5 2 | 3 4 | 4 3 |;

et suivant ces conditions, la probabilité d'obtenir le nombre 2, serait seulement $\frac{1}{36}$, tandis que celle d'obtenir le nombre 7, serait $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$.

8. La définitition de la *probabilité mathématique*, donnée dans le n° 6 et les exemples précédens, font bien voir qu'*elle sera toujours exprimée par une fraction proprement dite, ou moindre que l'unité dont elle approchera d'autant plus que le nombre des chances favorables à l'événement que l'on considère, sera plus considérable par rapport au nombre total des chances possibles;* mais elle ne pourrait se changer dans l'unité, que s'il n'existait aucune chance contraire à cet événement, ce qui en rendrait la production certaine; ensorte que l'*unité est le symbole de la certitude.*

Il est à propos de remarquer aussi que *chaque événement incertain donne lieu à deux probabilités contraires, savoir, celle que cet événement arrivera, et celle qu'il n'arrivera pas; et que la somme de ces deux probabilités est toujours égale à l'unité.* Lorsqu'il s'agit, par exemple, d'amener le nombre 7 avec 2 dés, puisque sur les 36 chances qu'ils offrent, il n'y en a que 6 qui donnent le nombre 7, il y en a 30 qui ne le donnent pas: la probabilité d'obtenir le nombre 7 est donc $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$, la probabilité contraire $\frac{30}{36}$ ou $\frac{5}{6}$; et $\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$.

9. Après avoir exposé comment la notion de probabilité s'établit dans notre esprit, et comment elle peut dans certains cas être susceptible de mesure, il ne sera peut-être pas hors de propos de passer en revue les diverses acceptions qui ont été données au mot *probable*, dont est dérivé celui de *probabilité*. La racine est dans le mot *probabilis*, lequel, d'après l'analogie de sa formation, doit signifier *ce qui peut se prouver* (*). Cicéron a dit: « Le probable est ce qui arrive le plus souvent,

(*) *Probabilis qui probari et credi potest.* (Facciolati Lexic.)

» ou ce qui est établi dans l'opinion, ou enfin ce qui » a en soi quelque similitnde avec l'une ou l'autre de » ces choses, que ce soit d'ailleurs vrai ou faux, n'im- » porte, » définition qui ne paraît pas très-lumineuse(*).

« Le probable, suivant Aristote, est une proposition » qui paraît vraie soit à tout le monde, soit au plus » grand nombre, soit à tous les sages, ou à la plupart » d'entr'eux, ou aux plus célèbres (**). » On voit bien là le fondement de cette ridicule théorie du *probabilisme*, suivant laquelle les théologiens Jésuites affirmaient que l'approbation donnée par un docteur grave à une proposition quelconque, suffisait ponr la rendre probable, théorie dont Pascal a relevé si plaisamment l'absurdité (*OEuvres*, tom. I, p. 78).

Aucun des passages que je viens de citer ne contient le vrai sens que donnent maintenant au mot probable les écrivains qui s'expriment avec exactitude. Le *probable* n'est point ce qui peut actuellement se démontrer, mais ce qui doit arriver dans le plus grand nombre des cas, ce qui résulte du plus grand nombre des chances, ce qu'on peut affirmer par plus de raisons qu'il n'y en a pour le nier, enfin ce dont la probabilité mathématique surpasse $\frac{1}{2}$.

Un événement ou une proposition peut être plus ou moins probable qu'une autre; mais un événement ou une proposition *peu probable*, est à peu près l'opposé de

(*) *Probabile est id, quod ferè fieri solet, aut quod in opinione positum est, aut quod habet in se ad hæc quandam similitudinem, sive id falsum est, sive verum.* (Cicero, de Inventione, lib. I, cap. 29.)

(**) *Probabile Aristoteli est propositio quæ omnibus, aut plerisque, aut sapientioribus, iisque vel omnibus, vel plerisque, vel celeberrimis, vera videtur.* (Chauvini Lexicon philosophicum.)

*probable*, car on entend alors qu'il y a moins de motifs de croire que l'événement arrivera ou que la proposition est vraie, que de croire le contraire, et que la probabilité mathématique est beaucoup moindre que $\frac{1}{2}$.

10. Il suit de tout ce qui précède, que le mot *probabilité* est bien mal appliqué, quand on le donne à ces aperçus vagues et souvent contradictoires qui s'offrent en foule lorsqu'on n'envisage que superficiellement un sujet. Cicéron affirme « qu'il n'y a rien qu'on ne puisse » rendre probable dans le discours (*) »; mais ce prestige de l'éloquence ne peut s'opérer qu'en présentant des énumérations incomplètes, en dissimulant avec art une partie du sujet. C'est aussi comme cela que par la préoccupation, par l'influence du desir sur le raisonnement, on se trompe soi-même, en ne considérant un sujet que sous un seul des points de vue qu'il peut offrir, en fixant son attention avec opiniâtreté sur une seule conséquence. L'imagination se monte alors, et l'on en vient à regarder comme très-probables, même comme certains, des faits reconnus manifestement faux par tous ceux qui les ont soumis à l'examen dans le calme de la raison. L'entraînement qui nous fait adopter une opinion n'est pas toujours sa probabilité. Dès qu'il n'y a point de discussion complète, de développement des cas favorables et des cas contraires, il n'y a point, à proprement parler, d'estimation de probabilité; il y a croyance aveugle, illusion, emportement. C'est l'habitude de céder à cet entraînement qui produit dans un si grand nombre d'esprits une vacillation continuelle, une fluctuation d'idées qui les rend le jouet de toutes les sottises et les exagérations que la mode ou l'intérêt enfantent chaque jour.

(*) *Nihil est tam incredibile, quod non dicendo fiat probabile.* (Cicero, Præfat. paradox.)

Il est vrai que les habitudes de l'esprit et les dispositions de l'individu affaiblissent certaines impressions et en exaltent d'autres ; mais c'est à prévenir cet effet que tend le calcul des probabilités ou la discussion raisonnée qui en tient lieu. Comme le dit Condorcet, « il n'y a » personne qui n'ait observé sur lui-même qu'il a chan» gé d'opinion sur certains objets, suivant l'âge, les » circonstances, les événemens, sans pouvoir dire ce» pendant que ce changement ait été fondé sur de nou» veaux motifs, sans pouvoir y assigner d'autre cause » que l'impression plus ou moins forte des mêmes ob» jets. Or, si au lieu de juger par cette impression » qui multiplie ou exagère une partie des objets, tan» dis qu'elle atténue ou empêche de voir les autres, » on pouvait les compter ou les évaluer par le calcul, » notre raison cesserait d'être l'esclave de nos impres» sions. » (*Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des décisions, etc.* Discours préliminaire, page clxxxv.)

11. Ce vœu qui ne pouvait être que celui d'un ami de l'humanité, est malheureusement fort loin de son accomplissement. Jusqu'ici l'on n'a résolu qu'un bien petit nombre de questions vraiment intéressantes par rapport à la conduite de la sociéte ou des particuliers, et l'on a pu abuser du calcul dans cette partie des Mathématiques appliquées, comme dans toutes les autres, faute de connaître les principes fondamentaux dont il faudrait partir, ou d'avoir des faits en assez grand nombre et suffisamment constatés ; mais l'examen scrupuleux qui sera fait dans la suite de cet ouvrage, des diverses applications du calcul, montrera qu'il serait encore permis de concevoir quelqu'espérance de progrès ultérieurs, si la multitude d'observations auxquelles l'organisation sociale pourrait donner lieu, ne se perdait par la négligence des spectateurs, ou n'était

condamnée à l'oubli par l'amour-propre des hommes en place, dans la vue de cacher leurs fautes ou d'obscurcir le mérite de leurs prédécesseurs. En effet une circonstance bien digne d'attention, et sur laquelle nous aurons occasion de revenir, c'est que les faits qui paraissent les plus accidentels quand ils sont considérés un à un, manifestent un ordre lorsqu'on peut en observer un grand nombre de simultanés ou de consécutifs; et le calcul fait voir comment, sans connaître la nature de leurs causes ni le nombre des combinaisons qui les produisent ou les contrarient, on peut assigner des limites à leurs possibilités respectives, et par conséquent spéculer alors sur l'avenir conformément aux règles de la prudence (*).

Cette théorie assez récente, qui soumet au calcul des probabilités les questions dans lesquelles le nombre total des chances et ses rapports avec le nombre des chances de chaque espèce, sont illimités ou inassignables, sera exposée dans la seconde section de ce Traité; la première ne comprenant que des questions où ces rapports peuvent se déterminer *à priori*.

(*) Lorsque ces secours nous manquent, ce serait encore mettre à profit les sages réflexions de Condorcet, que de consigner dans des notes exactes les impressions que nous recevons des objets ou des lectures qui nous frappent, les principes que nous adoptons en conséquence de ces impressions, et les motifs sur lesquels ils sont appuyés, afin de pouvoir remonter, quand nous le voudrons, à l'origine de nos jugemens, en nous reportant aux époques où nous les avons formés, et en nous remettant sous les yeux les bases que nous leur avons données. Par de fréquentes revues de ce genre on rendrait, ce me semble, ses déterminations plus constantes, ses changemens d'opinions mieux motivés; et peut-être parviendrait-on à séparer entièrement ce qui est dû aux forces variables des impressions, de ce qui constitue la vérité des choses, qu'on doit toujours chercher; car « il ne faut pas recevoir les opinions de nos pères » comme des enfans, par la seule raison que nos pères les ont eues. » (*Pensées* de Marc-Aurèle, traduction de Joly, chap. 19, § 29.)

# SECTION PREMIÈRE.

## *Détermination de la probabilité, lorsque le nombre des chances de chaque espèce ou le rapport de ces nombres est assignable, et peut se déduire* à priori *de l'énoncé de la question.*

12. On a vu dans le n° 6, que la probabilité d'un événement avait pour mesure la fraction formée en divisant le nombre de chances favorables à cet événement, par le nombre total des chances; en ayant soin d'ailleurs de n'employer pour cette évaluation, que des chances également possibles. Si donc on désigne par $m$ le nombre de chances favorables à un événement, par $n$ le nombre de chances contraires, sa probabilité sera exprimée par

$$\frac{m}{m+n},$$

et la probabilité contraire, par

$$\frac{n}{m+n} \quad \text{ou} \quad 1-\frac{m}{m+n};$$

ensorte que si on représente par $e$ la première de ces probabilités, la seconde sera $1-e$.

Ayant, par exemple, un jeu composé de 32 cartes, parmi lesquelles il y a 12 *figures*, la probabilité qu'en tirant au hasard une carte de ce jeu, on aura une figure, sera $\frac{12}{32}$ ou $\frac{3}{8}$, et la probabilité contraire $\frac{20}{32}$ ou $\frac{5}{8}$.

Dans cette question on ne considère que deux sortes de chances, celles qui amènent une figure, et celles qui amènent une carte d'une autre espèce; il n'y a par conséquent que deux sortes d'événemens, dont l'une ne peut avoir lieu qu'à l'exclusion de l'autre : mais si on distinguait la couleur des figures en considérant à part la possibilité de prendre une figure en *cœur*, en *carreau*, en *pique* ou en *trèfle*, on aurait 5 événemens possibles. La probabilité d'avoir une figure dans une couleur, étant $\frac{3}{32}$, puisqu'il y en a 3 dans chaque couleur, le détail de tous les événemens possibles donnerait les probabilités

$\frac{3}{32}$ pour une figure en cœur,
$\frac{3}{32}$ .............. en carreau,
$\frac{3}{32}$ .............. en pique,
$\frac{3}{32}$ .............. en trèfle,
$\frac{20}{32}$ pour ne pas tomber sur une figure, fractions dont la somme compose l'unité.

Il en sera de même quelque multipliées que soient les diverses sortes d'événemens possibles. Une urne comprenant un nombre $m$ de boules blanches, $n$ de rouges, $p$ de bleues, $q$ de vertes, $r$ de jaunes, $s$ de noires, et de laquelle il faut tirer une boule au hasard, offre six sortes de chances composant un nombre total

$$m+n+p+q+r+s=T,$$

et donnant les probabilités

$\frac{m}{T}$ d'obtenir une boule blanche,

$\frac{n}{T}$, ........ une boule rouge,

et ainsi des 4 autres. La somme de toutes ces probabi-

lités est

$$\frac{m+n+p+q+r+s}{T}=\frac{T}{T}=1.$$

Je ferai observer ici que toutes les questions de probabilité auxquelles s'applique le calcul, peuvent être représentées par un tirage à faire dans une ou plusieurs urnes contenant diverses sortes de boules, ou par des dés ayant un nombre quelconque de faces marquées diversement. Pour concevoir le jet de pareils dés, il faut les supposer d'une forme prismatique très-allongée, ou terminés par des pyramides, afin qu'ils ne puissent rester que sur les faces parallélogrammes.

13. Dans les exemples ci dessus nous n'avons considéré que la *probabilité absolue* de chaque sorte d'événemens ; mais il y a des questions qui mènent à ne considérer une probabilité que relativement à d'autres.

Si, par exemple, dans le jet de deux dés on voulait comparer la probabilité d'amener le point 7 plutôt que le point 4, on verrait dans le nº 7, qu'il y a 6 chances différentes qui peuvent former le premier point, et qu'il n'y en a que 3 pour former le second : les probabilités absolues sont donc $\frac{6}{36}$ pour le point 7, $\frac{3}{36}$ pour 4, et $\frac{27}{36}$ pour les autres points. Si donc deux personnes jouaient ensemble sous la condition, pour l'une, d'amener le point 7, et pour l'autre le point 4, en regardant comme nuls tous les autres coups, la première ayant 6 chances pour elle, tandis que la seconde n'en aurait que 3, les probabilités seraient

$$\frac{6}{9} \text{ pour le gain de la 1}^{\text{re}}, \quad \frac{3}{9} \text{ pour celui de la 2}^{\text{e}};$$

ce qui s'obtiendrait également en divisant la probabi-

lité absolue du point 7 et celle du point 4, par la somme de ces deux probabilités; car il viendrait

$$\frac{\frac{6}{36}}{\frac{6}{36}+\frac{3}{36}}=\frac{6}{9},\quad \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}+\frac{3}{36}}=\frac{3}{9},$$

On trouvera de même, que dans l'exemple de l'urne contenant des boules de six couleurs différentes (12), la probabilité de tirer une boule blanche plutôt qu'une boule rouge, est

$$\frac{\frac{m}{T}}{\frac{m}{T}+\frac{n}{T}}=\frac{m}{m+n},$$

et la probabilité contraire, c'est-à-dire celle de tirer une boule rouge plutôt qu'une boule blanche, $\frac{n}{m+n}$.

Dans la détermination de la *probabilité relative*, on fait abstraction de toutes les chances étrangères aux deux événemens que l'on considère comme s'ils devaient seuls avoir lieu, puisque tous les autres sont nuls par rapport aux conditions qu'on s'est imposées; et de là résulte, comme on l'a vu par les exemples ci-dessus, que la *probabilité relative s'obtient en divisant la probabilité absolue de l'événement dont il s'agit, par la somme des probabilités absolues des deux événemens que l'on compare.*

14. Il faut remarquer aussi qu'une probabilité peut s'obtenir en prenant la somme de plusieurs autres; et cela arrive lorsque de plusieurs classes de chances on n'en forme plus qu'une seule, en cessant d'avoir égard aux circonstances qui les distinguent. Si, par exemple, on

jouait avec deux dés sous la condition d'amener indistinctement soit 7, soit 8, on verrait par le tableau de la page 11, qu'il y a 6 manières d'amener le point 7, 5 d'amener le point 8; la probabilité d'amener l'un ou l'autre serait donc

$$\frac{6}{36}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36};$$

ce qui est d'ailleurs évident, puisque la condition proposée embrasse 11 chances sur les 36 que le jet peut amener.

15. Souvent l'événement attendu se compose du concours de plusieurs autres qui ont chacun leur probabilité propre, et desquelles il faut déduire celle du premier. Si, par exemple, lorsqu'il s'agit de tirer d'un jeu de 32 cartes, une figure d'une couleur donnée, on partage d'abord ce jeu en 4 paquets, dont chacun ne contienne que les 8 cartes d'une même couleur, mêlées d'ailleurs d'une manière quelconque, la carte désignée pouvant être indifféremment dans l'un quelconque des 4 paquets, la probabilité de mettre la main sur le paquet qui la renferme est $\frac{1}{4}$; mais comme ce paquet contient 8 cartes, sur lesquelles il y en a 3 qui remplissent la condition demandée, la probabilité de mettre la main sur l'une de ces cartes, lorsqu'on en prend une dans le paquet où elle se trouve, est $\frac{3}{8}$. Ainsi pour arriver à la carte demandée, il faut le concours de deux événemens dont les probabilités particulières sont $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{8}$. La probabilité de ce concours est le produit des deux précédentes; car puisque les paquets sont égaux, et qu'un seul contient la carte désignée, il ne faut chercher les chances qui la donnent que dans le $\frac{1}{4}$ du nombre total des chances, et comme des 8 chances renfermées dans ce $\frac{1}{4}$, 3 seulement remplissent la condition de-

mandée, il faudra donc prendre les $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{4}$ pour obtenir le rapport du nombre des chances favorables, au nombre total des chances, ou la probabilité cherchée qui sera $\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{32}$.

16. L'exemple ci-dessus peut être représenté par le jet simultané de deux dés, le premier ayant 4 faces, 1 marquée *A*, les 3 autres blanches, et le second ayant 8 faces, 3 marquées *B*, les 5 autres blanches : le concours des lettres *A* et *B*, sera précisément semblable à celui des événemens indiqués dans le n° précédent. Mais en raisonnant comme dans le n° 7, on voit que l'une quelconque des faces du premier dé pouvant se présenter avec toutes celles du second, le nombre total des chances sera $4\times 8=32$, et sur ce nombre 3 seulement, formées par la combinaison de la face *A* du premier dé avec les 3 faces *B* du second, rempliront la condition demandée; la probabilité cherchée sera donc $\frac{3}{32}=\frac{1}{4}.\frac{3}{8}$, comme on l'a trouvé d'une autre manière.

17. En général soit $\frac{m}{m+n}$ la probabilité d'un événement, $\frac{p}{p+q}$ celle d'un autre; la probabilité de leur concours sera

$$\frac{m}{m+n}\times\frac{p}{p+q}=\frac{mp}{(m+n)(p+q)};$$

car le genre de hasard proposé peut être assimilé au jet de deux dés, dont le premier aurait $m$ faces marquées *A*, et $n$ faces blanches, le second $p$ faces marquées *B* et $q$ faces blanches. Alors le nombre total des chances possibles serait $(m+n)(p+q)$; mais sur ce nombre, il n'y aurait que les $mp$ combinaisons des faces marquées *A* avec les faces marquées *B* qui

produiraient l'événement demandé; ainsi la probabilité du concours des événemens *A* et *B* serait

$$\frac{mp}{(m+n)(p+q)}=\frac{m}{m+n}\times\frac{p}{p+q}.$$

On étendrait sans peine ces considérations au concours de trois événemens *A*, *B*, *C*, dont les probabilités particulières seraient

$$\frac{m}{m+n},\ \frac{p}{p+q},\ \frac{r}{r+s}.$$

On trouverait pour la probabilité de ce concours

$$\frac{mpr}{(m+n)(p+q)(r+s)}=\frac{m}{m+n}\times\frac{p}{p+q}\times\frac{r}{r+s};$$

et ainsi de suite, quel que fût le nombre des événemens.

En désignant sous la dénomination de *probabilité simple*, celle de chaque événement pris en particulier, et de *probabilité composée*, celle de leur concours, on peut donc poser généralement ce principe : que *la probabilité composée s'obtient en faisant le produit des probabilités simples.*

18. La considération des probabilités composées, dispensant de former le développement de toutes les combinaisons possibles, abrège quelquefois les calculs : en voici un exemple assez simple. Supposons qu'on ait assemblé dans un paquet les 13 cartes d'une même couleur qui se trouvent dans un jeu complet de 52 cartes, et *qu'on demande la probabilité que les deux premières cartes du paquet soient un* as *et un* deux; la probabilité que l'*as* soit à la première place est $\frac{1}{13}$, puisque cette carte pourrait occuper l'une quelconque des 13 places du paquet; cette carte ôtée, il en reste

12; ainsi la probabilité que le *deux* se trouvera la première carte de ces 12, sera $\frac{1}{12}$ : la probabilité du concours de ces deux événemens sera donc

$$\frac{1}{13} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{156}.$$

Pour résoudre cette question en remontant à l'énumération de toutes les chances possibles, il faut d'abord chercher le nombre des arrangemens dont peuvent être susceptibles 13 cartes, et qui, d'après la formule des permutations donnée dans les *Élémens d'algèbre*, est le produit 1.2.3....11.12.13. On observera ensuite que lorsque deux des 13 cartes du paquet ont une place déterminée, il en reste 11 que l'on peut arranger entr'elles de toutes les manières possibles, c'est-à-dire de 1.2.3....11 manières : ce sont là les chances qui produisent l'événement desiré, dont la probabilité sera par conséquent

$$\frac{1.2.3....11}{1.2.3....11.12.13}.$$

En supprimant les facteurs 1.2.3....11, communs au numérateur et au dénominateur, il viendra seulement

$$\frac{1}{12.13} = \frac{1}{156},$$

ainsi qu'on l'a trouvé ci-dessus.

19. La question suivante montrera mieux encore la facilité que la considération des probabilités composées procure pour résoudre les problèmes, et donnera lieu à quelques remarques utiles.

*Soient deux urnes dans l'une desquelles il y ait 2 boules blanches et 1 noire, et dans l'autre 4 boules*

*blanches et* 1 *noire; on demande la probabilité d'amener une boule blanche, en prenant au hasard dans l'une quelconque de ces urnes?* La probabilité qu'on mettra la main dans la première urne étant $\frac{1}{2}$, et la probabilité qu'il sortira une boule blanche de cette urne étant $\frac{2}{3}$, la probabilité du concours de ces deux événemens est donc $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$ ou $\frac{2}{6}$.

On a de même pour le tirage de la seconde urne,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10}.$$

Les deux probabilités $\frac{2}{6}$ et $\frac{4}{10}$, répondant à deux parties distinctes d'un même événement, doivent s'ajouter pour former la probabilité totale

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{10} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

La probabilité de tirer une boule noire se calcule de même. On trouve pour la première urne $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, pour la seconde $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$, et la somme $\frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{4}{15}$. En l'ajoutant à $\frac{11}{15}$, il vient l'unité, ainsi que cela doit être, puisqu'il s'agit de deux événemens dont l'un ou l'autre arrive nécessairement.

On éprouvera peut-être quelque difficulté à concevoir nettement ce que l'on fait quand on ajoute, comme ci-dessus, des probabilités tirées d'épreuves différentes. Pour l'éclaircir, je vais résoudre la même question, en considérant les deux tirages conjointement, et je préviendrai d'abord une erreur dans laquelle il paraît facile de tomber. Au premier coup d'œil, on pourrait penser que puisque les deux tirages s'opèrent sur la totalité des boules contenues dans les deux urnes, et dont

le nombre est 8, sur lesquelles il s'en trouve 6 blanches, la probabilité d'en obtenir une de cette couleur est $\frac{6}{8}$ ou $\frac{3}{4}$, fraction qui surpasse $\frac{11}{15}$.

L'erreur que l'on commettrait vient de ce que pour mettre en commun les boules de la première urne avec celles de la seconde, il faut que le nombre en soit le même dans l'une et dans l'autre, afin que toutes les chances soient également possibles, ce qui n'aurait pas lieu sans cela. En effet, dans le tirage à effectuer sur la première urne, les 3 boules qu'elle renferme prises toutes ensemble comptent pour autant que les 5 qui sont contenues dans la seconde urne; mais si on réunit les unes avec les autres, les dernières étant plus nombreuses peuvent se présenter plus souvent à la main et acquièrent par conséquent une plus grande possibilité de sortir. Cette inégalité disparaît lorsqu'on réduit les probabilités au même dénominateur, ce qui d'ailleurs n'en altère point les valeurs respectives. En procédant ainsi, on change les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ en $\frac{10}{15}$ et $\frac{12}{15}$ : alors la première urne est censée contenir 10 boules blanches et 5 noires, la seconde, 12 boules blanches et 3 noires, les probabilités respectives sont les mêmes qu'auparavant, et le nombre total des boules est devenu le même dans chaque urne; considérant donc ces boules comme réunies dans une seule urne, au nombre de 30 dont 22 blanches, on a pour le tirage de l'une de celles-ci la probabilité $\frac{22}{30}$ ou $\frac{11}{15}$.

On s'assurera en général de l'identité des résultats obtenus par l'un et l'autre de ces deux procédés, en supposant des urnes en nombre $a$, contenant chacune $m$ boules blanches et $n$ noires, et des urnes en nombre $b$, contenant $p$ boules blanches et $q$ boules noires. Par le premier procédé, on aura pour la probabilité du tirage d'une boule blanche,

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{p}{p+q} = \frac{am(p+q)+bp(m+n)}{(a+b)(m+n)(p+q)}$$
$$= \frac{ams+bpr}{crs},$$

en faisant pour abréger

$$a+b=c, \quad m+n=r, \quad p+q=s.$$

Si l'on réduit au même dénominateur les fractions $\frac{m}{r}$, $\frac{p}{s}$, il viendra $\frac{ms}{rs}$, $\frac{pr}{rs}$, et l'on pourra remplacer toutes les urnes par une seule contenant $crs$ boules sur lesquelles il y en a $ams + bpr$ qui sont blanches, d'où résultera la probabilité trouvée ci-dessus, bien différente de la fraction $\frac{am+bp}{ar+bs}$ formée en divisant le nombre actuel des boules blanches par le nombre total et actuel des boules. Cet exemple fait voir combien il est aisé de se tromper dans la recherche des probabilités ; et il s'en présentera encore d'autres du même genre dans la suite.

*Détermination des Probabilités dans les épreuves répétées des mêmes hasards.*

20. J'entends ici par *épreuves répétées*, les jets successifs d'un même nombre de dés semblables, ou les tirages de numéros pris dans une urne, et remis chaque fois, afin de conserver toujours le même rapport entre le nombre de chances de chaque espèce.

Ce genre de probabilités se détermine d'abord par la considération des probabilités composées. Se proposer, par exemple, d'amener deux fois de suite le point 6, en jetant deux fois le même dé, c'est de-

mander le concours de deux événemens dont la probabilité simple est $\frac{1}{6}$; on aura donc pour la probabilité cherchée (17) $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$; on trouvera de même que la probabilité de ne pas amener du tout le point 6 est $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$. La somme de ces deux probabilités n'est pas 1, parce qu'outre les deux événemens que nous venons d'indiquer, il y a encore celui de n'amener 6 qu'au premier jet, ou de ne l'amener qu'au second: la probabilité du premier événement est $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$, celle du second, $\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$; et la réunion des quatre probabilités qu'on vient de trouver, donne

$$\frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{5}{36} + \frac{25}{36} = \frac{36}{36} = 1.$$

Au lieu de calculer ainsi, l'une après l'autre, les probabilités des divers événemens qui résultent des jets successifs du même dé, on peut les obtenir toutes à la fois dans une même formule. Il suffit pour cela de considérer que si dans une épreuve il y a $m$ chances qui produisent l'événement $A$, $n$ chances qui produisent l'événement $B$; sur le nombre $(m+n)(m+n) = (m+n)^2$ qui embrasse tous les arrangemens possibles des chances dans les deux épreuves, il y en aura $m^2$ qui produiront la succession $AA$, $mn$ la succession $AB$, $nm$ la succession $BA$ et $n^2$ la succession $BB$ (17); ensorte que les probabilités pour obtenir les événemens composés comme il suit,

$$AA, \qquad AB, \qquad BA, \qquad BB,$$

sont respectivement

$$\frac{m^2}{(m+n)^2}, \quad \frac{mn}{(m+n)^2}, \quad \frac{mn}{(m+n)^2}, \quad \frac{n^2}{(m+n)^2}.$$

Si l'on ne distinguait pas l'ordre des événemens simples, on regarderait comme ne formant qu'un seul événement composé, les arrangemens *AB* et *BA*; alors la probabilité d'obtenir l'un ou l'autre serait $\frac{2mn}{(m+n)^2}$; ensorte qu'il n'y aurait plus que trois événemens composés

$$AA, \qquad AB, \qquad BB,$$

ayant les probabilités

$$\frac{m^2}{(m+n)^2}, \qquad \frac{2mn}{(m+n)^2}, \qquad \frac{n^2}{(m+n)^2},$$

dont les numérateurs sont les termes du développement de la seconde puissance du binome $m+n$, et dont la somme est égale à l'unité.

On trouve d'une manière semblable les diverses probabilités pour un nombre quelconque d'épreuves, dans le développement de

$$(m+n)^p = m^p + \frac{p}{1} m^{p-1}n + \frac{p(p-1)}{1.2} m^{p-2}n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots q} m^{p-q}n^q \ldots + n^p.$$

Le premier terme $m^p$ indique le nombre de chances qui sur un nombre $p$ d'épreuves, donnent $p$ fois l'événement *A*;

Le second terme $\frac{p}{1} m^{p-1}n$, le nombre de chances qui donnent $p-1$ fois l'événement *A* et une fois l'événement *B*, dans quelqu'ordre que ce soit.

Le terme général $\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots q} m^{p-q}n^q$, le nombre de chances qui donnent $p-q$ fois l'évé-

nement $A$ et $q$ fois l'événement $B$, sans distinction d'ordre.

Si on voulait établir une succession déterminée, il faudrait supprimer le coefficient et ne prendre que $m^{p-q}n^q$.

En divisant donc chacun de ces termes par le nombre total des chances qui est $(m+n)^p$, on aura les probabilités de chacune des successions d'événemens simples auxquelles ils se rapportent.

21. Pour vérifier directement ces énoncés, il n'y a qu'à désigner par

$$m' \text{ et } n',\; m'' \text{ et } n'',\; m''' \text{ et } n''', \text{ etc.}$$

le nombre des chances qui amènent les événemens $A$ et $B$ à la première, à la deuxième, à la troisième, etc. épreuve, et développer les produits,

$$(m'+n')(m''+n''),\; (m'+n')(m''+n'')(m'''+n'''), \text{ etc.}$$

On a pour le premier

$$\begin{array}{l} m'm'' + m'n'' \\ \quad + n'm'' + n'n'', \end{array}$$

pour le second

$$\begin{array}{l} m'm''m''' + m'm''n''' \\ \quad + m'n''m''' + m'n''n''' \\ \quad + n'm''m''' + n'm''n''' \\ \qquad + n'n''m''' + n'n''n''', \end{array}$$

etc.

D'après ce qui a été dit dans le n° 17, un terme quelconque de ces produits exprimera le nombre de chances qui donnent l'événement composé des événemens simples $A$ et $B$, répétés, le premier autant de fois que la lettre $m$ entre dans ce terme, et le second autant de fois qu'y entre la lettre $n$, les accens

marquant d'ailleurs l'ordre des épreuves. Par exemple, les termes

$$\left.\begin{matrix} m'm''n''' \\ m'n''m''' \\ n'm''m''' \end{matrix}\right\} \text{ répondent aux successions } \left\{\begin{matrix} AAB \\ ABA \\ BAA \end{matrix}\right.$$

Si maintenant l'on pose $m' = m'' = m''' = m$, ce qui changera

$$(m' + n')(m'' + n'')(m''' + n''') \text{ en } (m + n)^3,$$

les termes indiqués ci-dessus deviendront tous égaux à $m^2n$, nombre qui sera celui des chances relatives à chacun des trois événemens désignés, tous distincts, lorsqu'on fixe l'ordre de la succession des événemens simples dont ils se composent.

Si l'on fait abstraction de cet ordre, ils ne formeront plus qu'un seul événement répondant à la somme de toutes leurs chances, c'est-à-dire $3m^2n$, expression qui ne diffère de $m^2n$ que par le coefficient que ce produit obtient dans le développement de $(m + n)^3$. Il est aisé de voir qu'on arriverait aux mêmes conclusions pour un nombre quelconque d'épreuves.

22. Soit pour abréger

$$\frac{m}{m + n} = e, \quad \frac{n}{m + n} = 1 - e = f;$$

le développement

$$\frac{m^p}{(m+n)^p} + \frac{p}{1}\,\frac{m^{p-1}n}{(m+n)^p} + \frac{p(p-1)}{1.2}\,\frac{m^{p-2}n^2}{(m+n)^p} + \text{etc.}$$

duquel se tirent toutes les probabilités des divers évé-

nemens composés que peut offrir un nombre $p$ d'épreuves (20), se changera en

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1}f + \frac{p(p-1)}{1.2} e^{p-2}f^2 \dots\dots$$
$$+ \frac{p(p-1)\dots(p-q+1)}{1.2.3\dots q} e^{p-q}f^q \dots + f^p,$$

formule dans laquelle un terme pris isolément exprime la probabilité d'un événement composé de $A$ répété autant de fois que le marque l'exposant de la lettre $e$, et de $B$ répété autant de fois que le marque l'exposant de la lettre $f$.

Le plus souvent on ne fixe pas d'une manière précise le nombre de répétitions du même événement; mais on lui assigne seulement une limite. C'est ainsi qu'on peut chercher la probabilité de n'avoir pas moins de $p-1$ événemens $A$ sur le nombre $p$ d'épreuves, énoncé qui admet aussi le cas où il arriverait $p$ événemens $A$, et auquel satisfont par conséquent les deux premiers termes de la formule ci-dessus; la probabilité de ces événemens sera donc indiquée par

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1}f,$$

somme des deux premiers termes.

De même la somme des trois premiers

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1}f + \frac{p(p-1)}{1.2} e^{p-2}f^2$$

indiquera la probabilité de ne pas avoir moins de $p-2$ événemens $A$, et plus de 2 événemens $B$.

Et en général la somme des termes de la formule, depuis le premier jusqu'à celui qui est affecté de

$e^{p-q}f^q$, c'est-à-dire

$$e^p + \frac{p}{1} e^{p-1}f \ldots\ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots.q} e^{p-q}f^q,$$

indiquera la probabilité de n'avoir pas moins de $p-q$ événemens $A$ et plus de $q$ événemens $B$.

Si par exemple on demande la probabilité d'amener le point 6 au moins 2 fois dans quatre jets successifs d'un dé à six faces, on fera

$$e = \frac{1}{6},\ f = \frac{5}{6},\ p = 4,$$

et il viendra pour cette probabilité,

$$e^4 + 4e^3f + 6e^2f^2 = \frac{1}{6^4} + 4\frac{1.5}{6^4} + 6\frac{1.25}{6^4} = \frac{1+20+150}{1296}$$
$$= \frac{171}{1296} \text{ entre } \frac{1}{7} \text{ et } \frac{1}{8}.$$

Si on eût demandé seulement d'amener 6 au moins une fois, il aurait fallu prendre la somme des 4 premiers termes du développement de $(e+f)^4$; mais comme $e+f=1$, et que par conséquent $(e+f)^4=1$, la somme des 4 premiers termes est égale à $1-f^4$; il est donc plus court de calculer directement le terme $f^4$ pour le retrancher de l'unité, ce qui donnera

$$1 - \frac{5^4}{6^4} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$$

pour la probabilité demandée; et puisqu'elle surpasse $\frac{1}{2}$, il en résulte qu'il est *probable* que le point 6 arrivera au moins une fois dans quatre jets (9).

La probabilité de l'événement contraire est $f^4 = \frac{625}{1296}$, puisque le terme $f^4$, ne contenant pas la lettre $e$, in-

dique la répétition des seuls événemens $B$; c'est donc par sa contraire que nous avons déterminé la probabilité demandée ; et il faut opérer ainsi toutes les fois que l'expression de la première est plus simple que celle de la seconde.

23. On voit encore par l'exemple précédent comment la probabilité d'amener le point 6 au moins une fois, qui n'était que $\frac{1}{6}$ à la première épreuve, s'est accrue par la répétition des jets du dé. Ce changement peut faire naître la question suivante : *déterminer le nombre d'épreuves nécessaire pour qu'un événement acquière une probabilité donnée ?* Si on demandait en combien de jets du même dé on obtiendra la probabilité $g$ que le point 6 arrivera au moins une fois, on aurait $e=\frac{1}{6}$, $f=\frac{5}{6}$, $q=p-1$, et il faudrait déterminer $p$ par la condition que la somme des termes

$$e^p+\frac{p}{1}e^{p-1}f \ldots . + \frac{p}{1}ef^{p-1}$$

fût égale à $g$, ce qui ne pourrait se faire immédiatement que par des essais répétés ; mais en prenant la probabilité contraire, exprimée par le seul terme $f^p$, et qui, dans l'hypothèse proposée, doit être égale à $1-g$ ou $k$, on aura l'équation

$$f^p=k, \quad \text{d'où} \quad p\log f=\log k,\ p=\frac{\log k}{\log f};$$

si l'on substitue aux lettres $f$ et $k$, les fractions $\frac{n}{s}$, $\frac{r}{t}$, on trouvera

$$p=\frac{1.\frac{r}{t}}{1.\frac{n}{s}}=\frac{lt-lr}{ls-ln}.$$

J'appliquerai cette formule au problème qui paraît avoir été le premier de ce genre que les géomètres aient résolu, c'est celui de *trouver le nombre de jets de deux dés, dans lequel il y a autant de probabilité d'amener deux six* (*ou sonnez*) *que de ne pas le faire.* Pour cet exemple, on a

$$k=\frac{1}{2}, e=\frac{1}{36}, f=\frac{35}{36} (7), \text{ d'où } p=\frac{l2}{l36-l35}=24,6;$$

ce qui montre que l'événement proposé est moins probable que le contraire, quand on n'embrasse que 24 jets, et plus probable, quand on en prend 25. Cette conclusion paraissait fausse au chevalier de Méré qui proposa le problème à Pascal, et tourna ses méditations sur le calcul des probabilités. Ce chevalier, homme d'esprit, mais étranger aux Mathématiques, croyait que puisqu'il suffisait de 4 jets pour arriver à une probabilité surpassant $\frac{1}{2}$, d'amener le point 6 avec un seul dé, qui n'offrait que 6 chances à chaque coup, le jet de deux dés en présentant 36, ou 6 fois 6, il devait suffire de 6 fois 4 ou 24 jets, pour obtenir le même résultat par rapport à l'événement 6,6 (ou sonnez); le contraire lui paraissait *un grand scandale, qui lui faisait dire hautement que les propositions n'étaient pas constantes, et que l'Arithmétique se démentait.* (Lettre de Pascal à Fermat, *Œuvres de Pascal, t. IV, p.* 419).

24. La considération des divers événemens composés qui peuvent arriver dans les épreuves répétées du même jeu, mérite toute notre attention, parce qu'elle fournit, ainsi que l'a remarqué d'abord Jacques Bernoulli dans la quatrième Partie de l'*Ars conjectandi*, et ensuite Condorcet dans ses divers écrits sur le *Calcul des Probabilités*, les meilleures bases que l'on puisse

donner à la philosophie de ce calcul, pour fonder l'utilité de ses applications.

Les termes du développement de $(m+n)^p$ indiquant les chances favorables à chacun des événemens composés qui, dans un nombre $p$ d'épreuves, peuvent résulter des diverses successions d'événemens simples $A$ et $B$, il est facile de *déterminer lequel de ces événemens composés a le plus de chances en sa faveur, et est par conséquent le plus probable.* Il suffit pour cela de chercher quel est de tous les termes du développement $(m+n)^p$, celui dont la valeur est la plus considérable. Avant de passer à la détermination générale de ce terme, je crois à propos d'en donner quelques exemples numériques pour ceux des lecteurs à qui l'algèbre ne serait pas très-familière.

Premièrement, si l'on fait $m=n$, le plus grand terme sera celui qui occupe le milieu de la formule quand le nombre $p$ est impair; et lorsque ce nombre sera pair, il y aura deux termes consécutifs égaux, surpassant tous les autres et placés aussi dans le milieu du développement, comme on le voit ci-dessous dans les premières puissances du binome $m+n$,

$$(m+n)^2=m^2+2mn+n^2,$$
$$(m+n)^3=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3,$$
$$(m+n)^4=m^4+4m^3n+6m^2n^2+4mn^3+n^4,$$
$$(m+n)^5=m^5+5m^4n+10m^3n^2+10m^2n^3+5mn^4+n^5.$$

Les termes $2mn$ et $6m^2n^2$ du milieu de la seconde et de la quatrième deviennent respectivement $2m^2$ et $6m^4$, lorsque $m=n$, et ce sont les plus considérables parce qu'ils ne diffèrent des autres que par leur coefficient qui est le plus grand de tous ceux de la formule. Les termes $3m^2n$ et $3mn^2$ dans la troisième puissance, se changeant en $3m^3$, deviennent égaux; il en arrive

autant, dans la cinquième, aux termes $10m^3n^2$ et $10m^2n^3$ qui se changent en $10m^5$ et ont le plus grand coefficient.

Il résulte de là que si l'on considère un jeu où le nombre des chances soit le même en faveur de l'événement *A* et de son contraire *B*, les événemens composés les plus probables seront 1 fois *A* et 1 fois *B* dans 2 épreuves, 2 fois *A* et 2 fois *B* dans 4 épreuves, et ainsi de suite lorsque le nombre des épreuves est pair. Quand ce nombre est impair, il y a dans chaque épreuve deux événemens composés dont la probabilité est égale et surpasse celle de tous les autres, savoir, ceux d'amener 2 fois *A* et 1 fois *B* ou 2 fois *B* et 1 fois *A* dans 3 épreuves, 3 fois *A* et 2 fois *B* ou 2 fois *A* et 3 fois *B* dans 5 épreuves, et ainsi de suite.

Les probabilités de ces divers événemens seront

pour 1 fois *A* et 1 fois *B* $\quad \frac{2m^2}{(m+m)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,

2 fois *A* et 2 fois *B* $\quad \frac{6m^4}{(m+m)^4} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$,

pour 2 fois *A* et 1 fois *B*<br>ou 1 fois *A* et 2 fois *B* $\Big\} \quad \frac{3m^3}{(m+m)^3} = \frac{3}{8}$,

pour 3 fois *A* et 2 fois *B*<br>ou 2 fois *A* et 3 fois *B* $\Big\} \quad \frac{10m^5}{(m+m)^5} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$.

Ces diverses probabilités décroissent à mesure que le nombre des épreuves augmente ; et cela est tout simple, car si chacune est la plus grande de toutes celles qui naissent du nombre d'épreuves dont elle fait partie, elle ne répond qu'à un seul des événemens composés qui se multiplient à mesure que l'on embrasse un plus grand nombre d'épreuves.

Il n'en est pas ainsi pour les probabilités relatives des

divers événemens composés fournis par le même nombre d'épreuves. Par exemple, la probabilité d'amener plutôt 1 fois *A* et 1 fois *B*, que 2 fois A, étant le quotient de la probabilité absolue du premier de ces deux événemens composés, par la somme des probabilités de l'un et de l'autre (13), on aura

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

La probabilité d'avoir plutôt 2 fois *A* et 2 fois *B* que 4 fois *A* de suite, se trouvera de même égale à

$$\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{16}+\frac{3}{8}}=\frac{6}{7},$$

fraction qui surpasse $\frac{2}{3}$. On obtiendrait toujours des résultats semblables, en poursuivant le calcul, et on en conclurait la différence de possibilité entre les événemens composés de la répétition constante du même événement et la possibilité de l'événement dont la composition se rapproche le plus du rapport de possibilité des événemens simples. Le seul bon sens suffit sans doute pour mener à ces conclusions, mais il n'en pourrait donner les valeurs précises, de même qu'il n'avait pu faire deviner au chevalier de Méré la réponse à la question qu'il s'était proposée; l'emploi du calcul sera donc indispensable toutes les fois qu'il s'agira de déterminer des valeurs résultantes d'opérations compliquées ou comprises dans des limites étroites.

25. Les formules générales correspondantes aux re-

marques du n° précédent, se présentent d'elles-mêmes, puisqu'il ne s'agit que de calculer le terme qui tient le milieu dans le développement d'une puissance paire du binome, ou les deux qui en prennent la place, quand la puissance est impaire.

L'expression du premier est

$$\frac{p(p-1)\ldots\left(p-\frac{p}{2}+1\right)}{1.2.\ldots\frac{p}{2}}m^{\frac{1}{2}p}n^{\frac{1}{2}p}$$

$$=\frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p}{2}+1\right)}{1.2.\ldots\frac{p}{2}}m^{p},$$

lorsque $m=n$; celle des autres est

$$\frac{p(p-1)\ldots\left(p-\frac{p-1}{2}+1\right)}{1.2.\ldots\frac{p-1}{2}}m^{\frac{1}{2}(p-1)}n^{\frac{1}{2}(p+1)}$$

$$=\frac{p(p-1)\ldots\left(\frac{p+1}{2}+1\right)}{1.2.\ldots\frac{p-1}{2}}m^{p}.$$

Pour en calculer la valeur, quand $p$ est très-grand, il faudrait former des produits composés d'un nombre considérable de facteurs, ce qui devient bientôt impraticable, à moins qu'on ne s'aide d'une formule très-remarquable découverte par Stirling, ou de celles que M. Laplace a données dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1781 et 1782, et dans sa *Théorie analytique des Probabilités*; on trouvera la première dans la note I, à la fin du présent ouvrage.

En l'employant au calcul de la probabilité d'obtenir 50 fois l'événement $A$ et 50 fois l'événement $B$ sur 100 épreuves, on trouve 0,0795892, probabilité très-petite en elle-même, parce qu'il ne s'agit que d'un seul événement pris parmi 101 ; mais si on la compare à celle d'amener 100 fois de suite l'événement $A$, on aura

$$\frac{0,0796}{\frac{1}{2^{100}}+0,0796}, \text{ ou à très-peu près } 1-\frac{1}{2^{100}\times 0,0796},$$

ce qui ne diffère pas sensiblement de l'unité, puisque le dénominateur de la fraction qu'il faut retrancher de cette unité, étant développé, aurait 30 chiffres.

Ce résultat montre la différence énorme qu'il y a entre les possibilités respectives des deux événemens dont je viens de faire la comparaison ; mais aussi il faut observer que la probabilité d'amener sans interruption, soit l'événement $A$, soit l'événement $B$, est plus petite que celles de tous les autres événemens composés ; celles-ci vont en augmentant à mesure qu'on se rapproche du terme moyen.

26. Lorsqu'il n'y a pas le même nombre de chances en faveur de chacun des événemens simples $A$ et $B$, *l'événement composé le plus probable est* encore *celui dans lequel le nombre des événemens* A *est à celui des événemens* B, *dans le rapport du nombre de chances favorables au premier, au nombre de chances favorables au second.*

Pour bien faire comprendre cet énoncé, prenons $m=3$, $n=2$ et faisons successivement $p=5$, $=10$. Dans le premier cas, le terme le plus considérable du développement de $(m+n)^5$ sera

$10m^3n^2 = 1080$ et donnera $\frac{1080}{5^5} = \frac{1080}{3125}$, environ $\frac{1}{3}$, pour la probabilité d'obtenir en 5 épreuves, 3 fois l'événement *A* et 2 fois l'événement *B*. Le plus grand terme du développement de $(m+n)^{10}$ est

$$\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}m^6n^4 = 210m^6n^4 = 210.3^6.2^4 = 2449440,$$

d'où il résulte

$$\frac{210.3^6.2^4}{5^{10}} = \frac{2449440}{9765625}, \text{ environ } \frac{2}{9},$$

pour la probabilité d'amener en 10 épreuves, 6 événemens *A* et 4 événemens *B*, nombres qui sont dans le rapport de 3 à 2. Cette probabilité est moindre que la précédente, par la raison déjà alléguée dans le n° 24; mais elle est toujours la plus grande relativement à toutes celles qui se déduisent du même développement.

Les multiples de 5 pouvant seuls se partager en deux nombres entiers qui soient entr'eux dans le rapport de 3 à 2, le développement des puissances dont l'exposant n'est pas un multiple de 5, ne contiennent pas de termes où les exposans des lettres $m$ et $n$ soient dans ce rapport; mais les termes qui approchent le plus de remplir cette condition, sont les plus considérables. C'est ce qu'on va voir par la détermination algébrique du plus grand terme du développement de $(m+n)^p$.

27. Le terme général du développement de $(m+n)^p$ étant

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots q}m^{p-q}n^q,$$

est précédé par

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q+2)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(q-1)}m^{p-q+1}n^{q-1}$$

et suivi par

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots(p-q)}{1,2.3\ldots\ldots\ldots\ldots(q+1)}m^{p-q-1}n^{q+1}.$$

Pour abréger représentons respectivement ces termes par $M$, $N$ et $N'$, et nous aurons

$$\frac{M}{N}=\frac{p-q+1}{q}\,\frac{n}{m},\quad \frac{M}{N'}=\frac{q+1}{p-q}\,\frac{m}{n};$$

mais si le terme $M$ surpasse à la fois $N$ et $N'$, il s'en-suivra que

$$\frac{M}{N}>1,\ \frac{M}{N'}>1,$$

d'où $$\frac{p-q+1}{q}\,\frac{n}{m}>1,\ \frac{q+1}{p-q}\,\frac{m}{n}>1.$$

On conclura de là

$$pn-qn+n>qm \qquad qm+m>pn-qn;$$

d'où $$q<\frac{pn+n}{m+n} \quad \text{et} > \frac{pn-m}{m+n}:$$

$q$ est donc le nombre entier compris entre les deux nombres ci-dessus, dont la différence est $\frac{m+n}{m+n}=1.$

Lorsque $p=r(m+n)$, il vient

$$q<rn+\frac{n}{m+n} \quad \text{et} > rn-\frac{m}{m+n}$$

$q$ est donc le nombre entier $rn$, et par conséquent $p - q = rm$.

De plus, il est aisé de voir qu'à partir de $M$, tous les termes vont continuellement en décroissant, soit lorsqu'on rétrograde vers le premier terme $m^p$, ou qu'on s'avance vers le dernier $n^p$. En effet le rapport $\frac{p-q+1}{q}\frac{n}{m}$, du terme général comparé à celui qui le précède, augmente à mesure que $q$ diminue, c'est-à-dire en remontant vers le premier terme, et diminue lorsque $q$ augmente, c'est-à-dire en allant vers le dernier terme. Si donc on désigne par $L$ le terme qui précède $N$, et par $L'$ celui qui suit $N'$, on aura en allant vers le premier terme,

$$\frac{M}{N} > 1, \quad \frac{N}{L} > \frac{M}{N}, \text{ etc. d'où } M > N, \; N > L, \text{ etc.}$$

et vers le dernier,

$$\frac{N'}{M} < 1, \quad \frac{L'}{N'} < \frac{N'}{M}, \text{ etc. d'où } N' < M, \; L' < N', \text{ etc.}$$

Le terme $M$ étant le plus considérable du développement de $(m+n)^p$, et la probabilité relative de l'événement composé auquel il répond, et de celui auquel répond un autre terme $K$, par exemple, étant exprimée par

$$\frac{M}{K+M} \quad (13),$$

approchera d'autant plus de l'unité que $K$ sera plus petit par rapport à $M$, ce qui démontre la remarque faite dans le n° 24, en la généralisant, puisqu'ici $m$ et $n$ sont supposés quelconques.

On voit donc par ce qui précède, *que de tous les événemens composés qui peuvent se présenter dans un nombre* $r(m+n)$ *d'épreuves, le plus probable comparativement à chacun des autres en particulier, est celui qui répond au terme affecté de* $m^{rm}n^{rn}$, *dans lequel les événemens* A *et* B *sont répétés l'un* rm *fois, l'autre* rn *; c'est-à-dire proportionnellement à leur probabilité particulière.*

28. On a vu aussi que la probabilité absolue d'un événement composé diminue à mesure que le nombre des épreuves augmente ; *mais il y a une probabilité qui va toujours croissant, c'est celle que les nombres qui marquent les répétitions des événemens simples* A *et* B, *comparés au nombre des épreuves, ne s'écarteront pas des probabilités de ces événemens, au-delà d'une limite donnée.*

Considérons d'abord pour plus de simplicité, le cas où il y a le même nombre de chances en faveur de chacun des événemens simples, et cherchons la probabilité d'en obtenir d'une composition telle, que le nombre des $A$ ne surpasse pas les $\frac{3}{5}$ du nombre d'épreuves, et ne soit pas moindre que les $\frac{2}{5}$, fractions entre lesquelles se trouve comprise $\frac{1}{2}$ probabilité particulière des événemens $A$ et $B$, et dont elle ne diffère que de $\frac{1}{10}$ en plus et en moins. Si nous ne considérons d'abord que 5 épreuves, la probabilité de ne pas obtenir plus de 3 et moins de 2 événemens $A$, se trouvera en prenant, dans le développement $(e+f)^5$, la partie

$$10e^3f^2 + 10e^2f^3 \ (22) ;$$

en y faisant $e=f=\frac{1}{2}$, elle donnera $\frac{20}{32}=\frac{5}{8}$.

Passons maintenant au cas où on embrasserait 10 épreuves, et où il faudrait par conséquent obtenir au plus 6 et au moins 4 événemens $A$; nous prendrons

alors dans le développement de $(e+f)^{10}$ la partie

$$210e^6f^4 + 252e^5f^5 + 210e^4f^6$$

dont on trouvera la valeur égale à $\frac{672}{1024} > \frac{5}{8}$ qui revient à $\frac{640}{1024}$.

L'accroissement de la probabilité cherchée est encore fort petit; mais il devient plus rapide à mesure qu'on augmente le nombre des épreuves. Lorsqu'on en considère 100, nombre dont les $\frac{3}{5} = 60$ et les $\frac{2}{5} = 40$, on doit prendre dans le développement de $(e+f)^{100}$ la partie qui commence au terme affecté de $e^{60}f^{40}$ et finit au terme affecté de $e^{40}f^{60}$ : l'opération s'abrège un peu lorsqu'on part du terme du milieu rapporté dans le n° 25.

En représentant par $C$ le coefficient de ce terme, par $C_1$ celui du terme qui vient après, par $C_2$ celui du terme qui vient après ce dernier, et ainsi des autres, on formera l'expression

$$Ce^{50}f^{50} + C\frac{50}{51}e^{49}f^{51} + C_1\frac{49}{52}e^{48}f^{52} \ldots + C_9\frac{41}{60}e^{40}f^{60}$$

où l'on voit comment chaque terme se forme du précédent, et où il faut observer qu'à cause de $e = f = \frac{1}{2}$,

$$e^{50}f^{50} = e^{49}f^{51} \ldots = e^{40}f^{60} = \frac{1}{2^{100}}.$$

Quant aux 10 termes qui précèdent $Ce^{50}f^{50}$, comme ils sont les mêmes que ceux qui le suivent, il suffira de doubler les derniers pour tenir compte des premiers; et en s'aidant des logarithmes, on trouvera sans peine que la somme cherchée est environ $\frac{96}{100}$, probabilité fort approchante de l'unité.

Si l'on avait assigné au rapport du nombre des événe-

mens $A$ avec le nombre des épreuves, des limites plus resserrées, on aurait trouvé une probabilité moindre. En n'étendant, par exemple, l'expression précédente que depuis le terme affecté de $e^{55}f^{45}$ jusqu'à celui qui est affecté de $e^{45}f^{55}$, on aurait pour limites $\frac{55}{100} = \frac{11}{20}$, et $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$ dont la différence avec $\frac{1}{2}$, est seulement $\frac{1}{20}$; mais on n'obtiendrait qu'une probabilité égale à $\frac{73}{100}$.

29. Ces résultats ne pourraient être que pressentis par le raisonnement seul ; il faut le secours du calcul pour en déterminer avec exactitude la valeur et même la nature. A cet égard on doit remarquer que l'augmentation de probabilité, à mesure qu'on embrasse un plus grand nombre d'épreuves, n'a lieu que pour les limites du rapport de ce nombre avec celui des événemens d'une espèce donnée, et non pas pour des différences déterminées dans le dernier de ces nombres.

Si l'on cherchait, par exemple, la probabilité de n'obtenir qu'un événement $A$ de plus ou de moins que la moitié du nombre des épreuves, cette probabilité se composerait de la somme des termes affectés de $e^6f^4$, $e^5f^5$, $e^4f^6$ dans le développement de $(e+f)^{10}$, et pour 100 épreuves, de la somme des termes affectés de $e^{51}f^{49}$, $e^{50}f^{50}$, $e^{49}f^{51}$ dans le développement de $(e+f)^{100}$, c'ést-à-dire toujours de trois termes : cette somme doit donc décroître continuellement (24).

Au contraire, quand il s'est agi des limites $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$ dans le rapport du nombre des épreuves à celui des événemens $A$, le nombre des termes composant la probabilité cherchée a toujours été en croissant : il y en avait 2 pour 5 épreuves, 3 pour 10 et 21 pour 100.

30. Ce qu'on vient de voir sur des exemples particuliers résulte d'une proposition de la plus haute importance, démontrée, pour la première fois, par Jacques Bernoulli, et qui s'énonce ainsi :

*On peut toujours assigner un nombre d'épreuves tel, qu'il donne une probabilité aussi approchante de la certitude qu'on le voudra, que le rapport du nombre de répétitions du même événement à celui des épreuves ne s'écartera pas de la probabilité simple de cet événement, au-delà de limites données, quelque resserrées qu'on suppose ces limites.*

Je vais prouver cette proposition en suivant d'assez près la marche qu'a tenue Jacques Bernoulli.

Soit $\frac{m}{m+n}$ la probabilité d'un événement $A$, $p$ le nombre des épreuves, qui fournirait $\frac{mp}{m+n}$ événemens de cette espèce, s'ils se répétaient exactement d'après leur probabilité simple ; mais supposons que le rapport, au lieu d'être précisément égal à $\frac{m}{m+n}$, soit seulement compris entre les fractions $\frac{m+1}{m+n}$ et $\frac{m-1}{m+n}$, ensorte que sur le nombre $p$ d'épreuves il n'y ait pas plus de $\frac{m+1}{m+n}p$, ni moins de $\frac{m-1}{m+n}p$ événemens $A$ ; et pour que ces derniers nombres soient entiers, faisons $p=r(m+n)$. Ils deviendront respectivement $rm+r$, $rm-r$ ; ainsi, dans le développement de........ $(m+n)^{rm+rn}$, les $2r+1$ termes pris depuis celui où l'exposant de la lettre $m$, est $rm+r$, jusqu'au terme où cet exposant est $rm-r$ inclusivement, donneront toutes les chances pour les événemens dont la composition est renfermée entre les limites assignées ci-dessus. Le plus grand terme du développement se trouvera placé au milieu de ceux que je viens d'indiquer ; car leur ensemble pourra être représenté par

$$\lambda m^{rm+r}n^{rn-r}\ldots\ldots+\mu m^{rm}n^{rn}\ldots\ldots+\lambda' m^{rm-r}n^{rn+r},$$

$\lambda$, $\mu$ et $\lambda'$ étant les coefficiens des termes qu'ils affectent; et si les trois termes écrits ci-dessus, sont désignés respectivement par les lettres $L$, $M$ et $L'$, on aura

$$\frac{M}{L}=\frac{(rm+r)\,(rm+r-1)\ldots\ldots(rm+1)}{(rn-r+1)\,(rn-r+2)\ldots\quad rn}\,\frac{n^r}{m^r},$$

$$\frac{M}{L'}=\frac{(rn+r)\,(rn+r-1)\ldots\ldots(rn+1)}{(rm-r+1)\,(rm-r+2)\ldots\quad rm}\,\frac{m^r}{n^r},$$

la seconde expression ne différant de la première que par le changement de $m$ en $n$, et réciproquement.

31. Cela posé, il faut d'abord montrer que la valeur du rapport $\frac{M}{L}$ peut être rendue aussi grande qu'on le voudra; pour cela on décomposera les puissances $n^r$ et $m^r$ dans leurs facteurs, pour les joindre à chacun de ceux des coefficiens, ce qui donnera

$$\frac{M}{L}=\frac{rmn+rn}{rmn-rm+m}\times\frac{rmn+rn-n}{rmn-rm+2m}\ldots\times\frac{rmn+n}{rmn}.$$

Tous ces facteurs surpassant l'unité, et leur nombre, égal à $r$, pouvant devenir aussi grand qu'on le voudra, leur produit doit aller toujours en croissant.

En divisant par $r$ tous les termes du premier et du dernier, on les met sous la forme

$$\frac{mn+n}{mn-m+\frac{m}{r}},\quad\frac{mn+\frac{n}{r}}{mn}$$

d'après laquelle on voit que la quantité

$$\frac{mn+n}{mn}=\frac{m+1}{m}$$

est comprise entre ces facteurs.

Or il est toujours possible d'assigner la valeur d'un nombre $q$, tel que $\left(\frac{m+1}{m}\right)^q$ égale ou surpasse un nombre donné $c$; car en posant

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^q = c,$$

et passant aux logarithmes, on trouve

$$q\,\{\mathrm{l}(m+1)-\mathrm{l}\,m\}=\mathrm{l}\,c,\ \text{d'où}\ q=\frac{\mathrm{l}\,c}{\mathrm{l}(m+1)-\mathrm{l}\,m};$$

Si cette valeur de $q$ n'est pas un nombre entier, on prendra celui qui la surpasse immédiatement.

Maintenant on peut faire ensorte que le facteur placé au rang marqué par $q$, dans la valeur de $\frac{M}{L}$, devienne égal à $\frac{m+1}{m}$; il suffit pour cela de poser l'équation

$$\frac{rmn+rn-(q-1)n}{rmn-rm+qm}=\frac{m+1}{m}$$

et de déterminer $r$ en conséquence. Cette équation, qui revient à

$$\frac{rmn+rn-(q-1)n}{rn-r+q}=m+1;$$

donne

$$r=q+\frac{qn-n}{m+1},\ r(m+n)=\left\{q+\frac{qn-n}{m+1}\right\}(m+n).$$

Par cette valeur de $r$ les $q-1$ facteurs pris sur la gauche de celle de $\frac{M}{L}$, surpassant $\frac{m+1}{m}$ qui est égal à celui du rang $q$, le produit des premiers multipliés par ce dernier, surpassera nécessairement.....

$\left(\frac{m+1}{m}\right)^q$, c'est-à-dire le nombre $c$; enfin les facteurs qui suivent étant tous $> 1$, le produit complet, ou la valeur de $\frac{M}{L}$, surpassera à plus forte raison le nombre $c$.

Par ce qui précède, on a donc déterminé le nombre $r$, de manière qu'en élevant le binome $m+n$ à la puissance marquée par $r(m+n)$, le rapport $\frac{M}{L}$ surpassera tel nombre donné qu'on voudra.

Pour traiter de même le second rapport $\frac{M}{L'}$, il suffira, suivant la remarque qui termine le n° 29, de changer $m$ en $n$, et réciproquement, dans les formules précédentes, ce qui donnera

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^q = c, \qquad q = \frac{\mathrm{l}c}{\mathrm{l}(n+1)-\mathrm{l}n},$$

$$r = q + \frac{qm-m}{n+1}, \quad r(m+n) = \left\{q + \frac{qm-m}{n+1}\right\}(m+n).$$

Lorsque cette valeur de $r$ différera de la précédente, ce qui aura lieu presque toujours, il faudra employer la plus considérable des deux qui rendra en même tems

$$\frac{M}{L} \text{ et } \frac{M}{L'} > c.$$

32. En partant de ce qui vient d'être établi dans les n^os précédens, Jacques Bernoulli fait voir que la somme des $r$ termes compris entre $M$ et $L$ inclusivement, peut être rendue aussi grande que l'on voudra par rapport à la somme de $r$ termes, pris sur la gauche de $L$, ou en allant vers le premier terme du développement. En

effet, si l'on désigne par $F, G, H$, etc. les termes compris entre $M$ et $L$ en allant de $M$ à $L$, puis par $P, Q, R$, etc. les termes qui précèdent $L$ en allant vers le premier terme $m^{rm+rn}$, comme le rapport des termes consécutifs du développement dont il s'agit, croît en allant vers la gauche, à partir de $M$ (27), on aura

$$\frac{M}{F}<\frac{L}{P}, \ \frac{F}{G}<\frac{P}{Q}, \ \frac{G}{H}<\frac{Q}{R}, \text{ etc.}$$

d'où $$\frac{M}{L}<\frac{F}{P}<\frac{G}{Q}<\frac{H}{R},$$

et par conséquent........................ $\frac{M}{L}<$

$$\frac{F+G+H+\text{etc.}}{P+Q+R+\text{etc.}}=\frac{\frac{F}{P}P+\frac{G}{Q}Q+\frac{H}{R}R+\text{etc.}}{P+Q+R+\text{etc.}}$$

Il suit de là que la valeur de $r$ qui rend $\frac{M}{L}>c$, rendra à plus forte raison

$$\frac{F+G+H+\text{etc.}}{P+Q+R+\text{etc.}}>c,$$

et

$$F+G+H+\text{etc.}>c\,(P+Q+R+\text{etc.})$$

Or le terme $M$ affecté de $m^{rm}n^{rn}$, en a $rn$ avant lui; $L$, pris $r$ places avant $M$, a par cette raison $rn-r$ ou $r(n-1)$ termes avant lui, qui pourront être partagés en $n-1$ groupes composés chacun de $r$ termes dont la subordination sera la même que celle qui vient d'être indiquée entre les termes $F, G$, etc. placés sur la gauche de $M$ jusqu'à $L$, et les termes $P, Q$, etc. placés à la gauche de $L$ dans le groupe commençant à ce dernier. Si donc on prend $c=i(n-1)$, ce qui donnera

$$F+G+H+\text{etc.}>i\,(n-1)(P+Q+R+\text{etc.})$$

4..

le premier groupe, divisé par $i$, surpassera le second pris $(n - 1)$ fois, c'est-à-dire autant de fois qu'il y a de groupes desquels chacun est plus petit que celui qui le précède à partir de $M$ : il est donc vrai que ce premier groupe surpassera au moins $i$ fois la somme de tous les autres.

On prouverait de même, en posant $c = i(m-1)$, que la somme des termes pris depuis $M$ exclusivement jusqu'à $L'$, surpasserait $i$ fois les $m - 1$ groupes de $r$ termes compris depuis $L'$ jusqu'au dernier terme sur la droite du développement, si $\frac{M}{L'} > i(m-1)$ ; et puisque rien ne limite la grandeur de $i$, la somme des termes compris depuis $L$ jusqu'à $L'$ inclusivement, pourra donc être rendue aussi approchante qu'on voudra de la valeur totale du développement de..... $(m+n)^{r(m+n)}$ : donc enfin il sera possible de rendre aussi voisine de l'unité qu'on voudra, la valeur de l'expression

$$\frac{\lambda m^{rm+r} n^{rn-r} \ldots\ldots\ldots + \lambda m^{rm-r} n^{rn+r}}{(m+n)^{r(m+n)}};$$

qui donne la probabilité de n'avoir pas plus de $r(m+1)$ et pas moins de $r(m-1)$ événemens $A$, sur $r(m+n)$ épreuves, et que par conséquent le rapport du nombre des répétitions de $A$ au nombre total d'épreuves, sera compris entre les limites

$$\frac{m+1}{m+n} \quad \text{et} \quad \frac{m-1}{m+n}.$$

33. Ces fractions, quoique déterminées en apparence, peuvent représenter des limites aussi resserrées qu'on voudra ; car si on fait $m = sm'$, $n = sn'$, elles de-

viendront

$$\frac{sm'+1}{s(m'+n')}=\frac{m'+\frac{1}{s}}{m'+n'},\quad \frac{sm'-1}{s(m'+n')}=\frac{m'-\frac{1}{s}}{m'+n'},$$

on aura en même tems

$$r(m+n)=rs(m'+n'),$$

et l'expression de la probabilité indiquée dans le numero précédent, prendra la forme

$$\frac{\lambda m'^{rsm'+r}n'^{rsn'-r}\ldots\ldots+\lambda' m'^{rsm'-r}n'^{rsn'+r}}{(m'+n')^{r(sm'+sn')}},$$

en y supprimant le facteur $s^{r(sm'+sn')}$ commun au numérateur et au dénominateur.

On passerait, au contraire, à des limites moins resserrées, en posant $m=\frac{m'}{s}$, $n=\frac{n'}{s}$, d'où il résulterait

$$\frac{m+1}{m+n}=\frac{m'+s}{m'+n'},\quad \frac{m-1}{m+n}=\frac{m'-s}{m'+n'},$$

et

$$r(m+n)=\frac{r}{s}(m'+n').$$

34. Jacques Bernoulli applique ses formules au cas où $m'=3$, $n'=2$; il pose d'abord $m=30$, $n=20$, et cherche le nombre d'épreuves nécessaire pour avoir une probabilité au moins égale à $\frac{1000}{1001}$ que le rapport du nombre de répétitions de $A$ au nombre des épreuves, sera renfermé dans les limites $\frac{31}{50}$ et $\frac{29}{50}$. Dans cet exemple, il faut faire $i=1000$; substituant alors, dans les formules du nº 31, $i(n-1)$ à $c$, pour

les termes de $M$ à $L$, il en résulte

$$q = \frac{li(n-1)}{l(m+1)-lm} = \frac{42787536}{142405} < 301,$$

$$r(m+n) = q(m+n) + \frac{qn-n}{m+1}(m+n) < 24728,$$

et posant $c = i(m-1)$ pour ceux de $M$ à $L'$, il vient

$$q = \frac{li(m-1)}{l(n+1)-ln} = \frac{44623980}{211893} < 211,$$

$$r(m+n) = q(m+n) + \frac{qm-m}{n+1}(m+n) = 25550:$$

ce dernier nombre étant le plus fort, est celui qu'il faut adopter; ainsi en embrassant 25550 épreuves, la probabilité des limites $\frac{31}{50}$ et $\frac{29}{50}$ surpassera $\frac{1000}{1001}$.

Jacques Bernoulli a déterminé aussi les nombres d'épreuves correspondans à des probabilités au moins égales à $\frac{10000}{10001}$, $\frac{100000}{100001}$; et pour ces nombres, qui s'obtiennent en faisant

$$i = 10000, \quad i = 100000,$$

il trouve

$$31258 \text{ et } 36966,$$

ce qui fait voir déjà que la probabilité augmente plus rapidement que le nombre des épreuves : celui-ci croît, dans l'exemple actuel, par des différences constantes et égales à 5708.

35. Si la probabilité que le rapport du nombre des répétitions de l'événement $A$ au nombre des épreuves sera renfermé entre les limites

$$\frac{m+1}{m+n} \text{ et } \frac{m-1}{m+n} \text{ ou } \frac{sm'+1}{s(m'+n')} \text{ et } \frac{sm'-1}{s(m'+n')}$$

peut être rendue aussi approchante qu'on voudra de l'unité, à plus forte raison en sera-t-il de même de la probabilité que ce rapport ne sera pas moindre que

$$\frac{m-1}{m+n} \text{ ou } \frac{sm'-1}{s(m'+n')},$$

puisque pour obtenir la dernière de ces probabilités, il faudra joindre aux termes employés à former la première tous ceux qui précèdent $\lambda m^{rm+r} n^{rn-r}$, c'est-à-dire, comparer avec le développement de $(m+n)^{r(m+n)}$, la somme de tous ses termes depuis le premier, $m^{rm+rn}$, jusqu'à $\lambda' m^{rm-r} n^{rn+r}$ inclusivement.

*Conséquences de la Probabilité mathématique.*

36. J'ai exposé dans les *Notions préliminaires*, comment celle de la probabilité s'établissait dans notre esprit, par l'influence de la répétition des jugemens favorables à la production du même événement, influence à laquelle il est impossible d'échapper lorsque cette répétition a lieu un grand nombre de fois; ensorte qu'il en résulte une probabilité mathématique très-voisine de l'unité; et j'ai dit en même tems que le calcul rattachait à ce cas celui d'une probabilité beaucoup plus faible (5). C'est en effet où conduit la proposition de Jacques Bernoulli (30), ainsi que l'a fait voir Condorcet, en discutant avec beaucoup de sagacité, et des intentions bien louables, dans l'excellent discours préliminaire de son *Essai sur l'Application de l'analyse à la probabilité des décisions*, la nature de la probabilité. Il a réduit cette théorie aux trois propositions suivantes.

1°. *Si la probabilité d'un événement surpasse $\frac{1}{2}$; il y a lieu de croire que cet événement arrivera, plutôt que de croire qu'il n'arrivera pas.*

2°. *Plus cette probabilité augmente, plus le motif de croire augmente.*

3°. *Il croît proportionnellement à cette probabilité.* (*Voyez* pag. vij du Discours cité plus haut.)

37. La première découle immédiatement de la proposition de Bernoulli ; car puisqu'en multipliant autant qu'il sera nécessaire, le nombre des épreuves, on peut atteindre à une probabilité aussi voisine de l'unité qu'on voudra, que le rapport du nombre des répétitions d'un événement, au nombre des épreuves, sera renfermé dans des limites aussi voisines qu'on voudra de sa probabilité ; il est démontré par là que si cette dernière est tant soit peu au-dessus de $\frac{1}{2}$, il deviendra aussi probable qu'on le voudra, que le nombre de répétitions de cet événement surpassera la moitié du nombre des épreuves : ses répétitions seront donc plus fréquentes que celles de l'événement contraire ; on sera donc forcé de lui assigner une plus grande possibilité ; et cette possibilité, le calcul, en la faisant dériver de la probabilité simple de l'événement ; en appuie la conséquence, c'est-à-dire la fréquente répétition du même événement, sur une probabilité qu'on peut rendre de plus en plus grande.

Concevons, par exemple, un événement dont la probabilité soit $\frac{101}{200}$ ; en la transformant dans la fraction équivalente $\frac{1010}{2000}$, on pourra, par le n° 34, calculer le nombre d'épreuves suffisant pour porter à $\frac{1000000}{1000001}$ la probabilité que cet événement n'arrivera pas moins de 1009 fois sur 2000. Sa supériorité sur l'événement contraire, quoique fort petite en elle-même, puisqu'il n'a qu'une chance de plus en sa faveur dans un nombre total de 200, sera néanmoins établie sur une probabilité égale à celle de tirer une boule blanche d'une urne qui en contiendrait un million de cette couleur, et une seule noire.

C'est donc sur un calcul rigoureux que sont fondées l'assertion par laquelle se termine le n° 5, et l'acception donnée dans le n° 9, au mot *probable*. La circonstance que ce mot exprime est en effet bien digne de remarque, puisque tout partage inégal dans le nombre des chances d'un hasard quelconque, établit dans la répétition des deux événemens contradictoires une inégalité dont à la longue la probabilité peut approcher aussi près qu'on le voudra de la certitude.

La croyance commandée par une telle probabilité établit donc la nécessité de croire à une probabilité beaucoup moindre, et fixe en même tems le sens et la valeur du motif. Si dans chaque épreuve considérée à part, la probabilité d'un événement l'emporte peu sur celle de son contraire, le motif de croire qu'il arrivera plutôt que de croire qu'il n'arrivera pas, demeure très-faible; mais lorsque l'on considère d'avance un grand nombre d'épreuves, le développement de toutes les combinaisons qu'elles produisent, donne de plus en plus, aux combinaisons où les événemens simples sont distribués dans des rapports approchans de leurs probabilités, la supériorité sur toutes les autres. Le nombre des épreuves, et par conséquent presque toujours le tems, entrent donc nécessairement dans l'évaluation du degré de confiance qu'on doit attacher à la probabilité mathématique. De là vient qu'il est contre la prudence de s'exposer sans nécessité aux chances d'un hasard qu'on ne peut tenter un très-grand nombre de fois. Cette règle indiquée par le simple bon sens, prend ici le caractère d'une vérité mathématique dont l'importance est fixée par le calcul, et fournira dans la suite les moyens d'apprécier numériquement et selon nos vrais intérêts, les diverses spéculations qu'on peut faire sur les événemens incertains.

38. La seconde proposition (36) suit naturellement de ce qui vient d'être dit. Le motif de croire à la production d'un événement doit augmenter avec la probabilité de cet événement; car lorsque celle-ci croîtra, il faudra moins d'épreuves pour obtenir une très-grande probabilité que le rapport du nombre des répétitions de l'événement au nombre total des épreuves, ne tombera pas au-dessous d'une limite donnée; ou, si l'on considère le même nombre d'épreuves et la même limite, on obtiendra une plus grande probabilité de cette limite; ou enfin le nombre des épreuves restant le même, la même probabilité répondra à une limite plus élevée, c'est-à-dire qu'elle indiquera un plus grand nombre de répétitions de l'événement désigné, et par conséquent une plus grande possibilité dans sa production, par suite de l'augmentation de sa probabilité simple.

39. Quant à la troisième proposition (36), elle semble assez évidente par elle-même dès qu'on a reconnu que le motif de croire à la production d'un événement augmente avec sa probabilité, et qu'on admet que ce motif est fondé sur la répétition des *jugemens de possibilité* (6, 7). Elle peut aussi se déduire immédiatement des calculs de Jacques Bernoulli; car 1°, puisque dans un nombre quelconque d'épreuves, le plus probable des événemens composés est celui où chaque événement simple se trouve répété proportionnellement à sa probabilité, 2° qu'en multipliant les épreuves, on peut rapprocher autant qu'on le voudra de l'unité, la probabilité que le rapport du nombre des répétitions de cet événement au nombre des épreuves s'écartera de moins en moins de sa probabilité, c'est-à-dire du rapport du nombre des jugemens favorables à sa production, au nombre total des jugemens portés sur tout ce que peut amener le

hasard dont il s'agit (6), il est naturel de prendre ce dernier rapport pour mesurer la possibilité de l'événement désigné, ou pour évaluer le motif de croire à sa production; et on y est forcé dès qu'on accorde l'influence qu'une probabilité très-grande doit exercer sur notre opinion.

40. C'est en considérant la liaison mathématique établie par les lois des combinaisons, entre la probabilité d'un événement et le nombre de ses répétitions à mesure qu'on en multiplie les épreuves, que Jacques Bernoulli conçut le premier la possibilité de faire servir d'une manière incontestable, l'observation des événemens passés à la détermination des événemens futurs, et de donner ainsi au calcul des probabilités un but bien autrement important que celui de régler la conduite des joueurs, pour lequel il avait d'abord été inventé (*). Bernoulli compara les événemens dont la cause est inconnue, aux tirages répétés dans une urne contenant un nombre inconnu de billets blancs et de billets noirs, mais qui demeurait le même, parce qu'après chaque épreuve on remettait dans l'urne le billet qui en avait été tiré, hypothèse fondée sur ce que le nombre total des événemens naturels pouvant être regardé comme infini, ne diminue pas sensiblement par l'arrivée d'un petit nombre de ces événemens. Il se proposa en conséquence cette question : *Chercher si, en augmentant sans cesse le nombre des observations, on faisait croître la probabilité d'obtenir le vrai rapport entre le nombre de cas*

(*) C'est l'objet de la IVe Partie de l'*Ars conjectandi*. Cet ouvrage posthume, imprimé en 1713, contient déjà les principaux fondemens de la philosophie du calcul des probabilités, mais elle y est demeurée presqu'ensevelie, jusqu'à ce que Condorcet l'ait rappelée, perfectionnée et étendue.

*dans lesquels un événement peut arriver, et les cas contraires, ensorte que cette probabilité surpassât un degré de certitude donné* (*)? Il retint pendant vingt ans dans son porte-feuille la solution de ce problème qu'il regardait comme le plus difficile et le plus important de ceux qu'on pouvait se proposer sur cette matière. Quant à son utilité, les considérations précédentes me semblent déjà suffire pour la mettre hors de doute; mais Bernoulli la portait encore plus loin, puisqu'il avait pour but, comme le montre l'énoncé ci-dessus, d'arriver à connaître la probabilité des faits d'après les observations seulement, c'est-à-dire *à posteriori*, afin d'appuyer sur l'autorité du calcul les inductions qu'on peut tirer de la répétition des phénomènes. A la vérité, il confondait, ainsi qu'on le verra dans la seconde section de ce Traité, la manière d'évaluer les probabilités *à posteriori* avec leur détermination *à priori*, ou par la connaissance des combinaisons; mais la différence des résultats de ces deux procédés diminuant d'autant plus que le nombre des observations est plus grand, on peut se servir de ceux de l'un pour faire entrevoir ceux de l'autre.

En effet les formules de Bernoulli montrant que dans une longue suite d'épreuves du même hasard, la distribution des événemens simples tend sans cesse à se rapprocher du rapport indiqué par leur probabilité, déterminent ainsi avec une probabilité de plus en plus grande la condition de l'urne d'où sortent les événe-

(*) L'expression *un degré de certitude*, reçue dans le langage ordinaire, ne me paraît pas très-exacte; mais Bernoulli s'en est servi comme équivalant à la probabilité qui, étant une fraction, tandis que l'unité représente la certitude, est pour ainsi dire une portion de celle-ci.

mens observés, et lient à des probabilités très-voisines de l'unité les nombreuses répétitions du même événement, ensorte que la croyance au retour de cet événement est commandée par le calcul comme par l'habitude, mais alors sur des motifs de valeurs comparables.

41. En insistant, comme je viens de le faire, sur les notions précédentes de la probabilité, Condorcet crut devoir rappeler qu'il n'y a pourtant « aucun rapport direct et nécessaire entre la probabilité d'un événement et sa réalité » (*voy*. p. x du Discours cité p. 55); et pour le prouver il observe que quoique le sort eût déjà prononcé sur un événement, il ne sortirait pas du domaine de la probabilité à l'égard de toute personne qui ne connaîtrait que la condition du jeu qui l'a produit, et qui serait restée dans l'ignorance du fait arrivé. Si, par exemple, d'une urne contenant 10000 billets blancs et 1 noir, on extrait un billet, et qu'après en avoir reconnu la couleur, on le replie pour le montrer à quelqu'un qui n'était pas présent au tirage, cette personne ne pourrait affirmer autre chose sur ce billet, sinon qu'il y a une probabilité $\frac{10000}{10001}$ qu'il est blanc, et seulement une probabilité $\frac{1}{10001}$ qu'il est noir; néanmoins l'un de ces deux événemens est certain pour les personnes qui ont déployé le billet en le sortant de l'urne : ainsi un événement certain pour ces personnes, peut n'avoir qu'une très-petite probabilité pour la première. L'ignorance du fait introduit ici la probabilité à la place de la certitude, et laissant l'esprit dans le même état où il se trouvait avant la décision du sort, le jugement ne saurait être porté que sur la connaissance des conditions de l'urne. Mais ce que Condorcet n'a point fait remarquer, c'est que, soit qu'on fasse prononcer ce jugement avant ou après les tirages, s'ils sont exécutés avec fidélité, la personne qui ne les aura pas vus, aura toujours la

même probabilité de ne pas se tromper sur un nombre donné de jugemens, dans un nombre donné de tirages; ensorte que la liaison de la probabilité avec la répétition des événemens, conserve toute sa force dans ce cas comme dans les autres; et c'est vraiment sur cette liaison que reposent toutes les applications légitimes du calcul des probabilités.

42. Avant de terminer ces remarques, je rappellerai que lorsque les diverses chances d'un jeu sont rigoureusement d'une égale possibilité, tant par la construction des instrumens aléatoires que par la manière de s'en servir, les événemens passés ne sauraient avoir aucune influence sur les événemens futurs. Si cependant, d'après des épreuves réitérées on aperçoit une fréquence marquée dans l'apparition de certaines chances, il y a lieu de penser que la constitution de l'instrument, ou l'habitude de celui qui l'emploie, détermine cette fréquence; mais la recherche de sa probabilité rentre dans celle des probabilités *à posteriori*.

Lorsqu'on a lieu de soupçonner d'avance quelqu'inégalité de ce genre, il est tout naturel d'attendre plutôt la répétition de l'événement qui s'est offert le premier, puisqu'on doit croire plutôt à l'arrivée du plus probable qu'à celle de l'autre; il n'est pas plus difficile d'apercevoir que toute inégalité entre les probabilités doit favoriser les répétitions du même; ce n'est là qu'une conséquence de la proposition de Bernoulli, que le bon sens indique suffisamment; mais l'appréciation de l'effet de cette inégalité se fait d'une manière très-simple, ainsi qu'il suit.

Soit $e$ la probabilité exacte qu'aurait un événement $A$, d'après les conditions du jeu qui le produit, et $e'$ la différence en plus ou en moins entre cette probabilité et celle qui a lieu réellement; la probabilité d'amener $n$ fois cet

événement étant $e^n$, deviendra $(e+e')^n$, si l'erreur est par excès, et $(e-e')^n$ si c'est par défaut : mais si l'on sait seulement que l'inégalité existe, sans savoir dans quel sens elle se trouve, et qu'on regarde comme également probable qu'elle soit additive ou soustractive, on aura pour la répétition de l'événement *A* dans la première hypothèse $\frac{1}{2}(e+e')^n$, dans la seconde $\frac{1}{2}(e-e')^n$, et pour la probabilité totale

$$\frac{1}{2}(e+e')^n+\frac{1}{2}(e-e')^n=e^n+\frac{n(n-1)}{1.2}e^{n-2}e'^2$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}e^{n-4}e'^4+\text{etc.},$$

développement dont tous les termes sont additifs ; ainsi cette probabilité surpasse la probabilité primitive $e^n$. On trouverait un semblable résultat pour la probabilité de la répétition de l'événement contraire, exprimée alors par le développement de $\frac{1}{2}(f-e')^n+\frac{1}{2}(f+e')^n$.

L'augmentation qui a lieu dans ce cas pour l'une et pour l'autre de ces probabilités est prise sur celles des événemens composés du mélange des deux événemens contradictoires : cela peut se voir aisément. Dans le cas de deux épreuves, par exemple, la probabilité $2ef$ d'amener la combinaison *AB* se change en

$$\frac{1}{2}.2(e+e')(f-e')+\frac{1}{2}.2(e-e')(f+e')=2ef-2e'^2(*).$$

*Questions pour servir d'exemples de la détermination* à priori *des probabilités.*

43. Montmort dans son *Analyse des Jeux de hasard*, et ensuite Moivre dans sa *Doctrine of Chances* (**), ont

(*) Ces dernières remarques sont tirées de la *Théorie analytique des Probabilités*, par M. Laplace, p. 185—186.

(**) Le premier de ces ouvrages a eu deux éditions, la dernière est de 1713 ; le second ouvrage, écrit en anglais, a eu trois éditions dont la dernière est de 1756.

résolu un grand nombre de problèmes sur les jeux de hasard ; mais il n'entre point dans le plan que je me suis tracé, de m'arrêter beaucoup sur ce genre de questions, parce que la plupart exigeraient d'assez grands détails pour faire connaître les conditions des jeux qu'elles concernent, et que d'ailleurs une partie de ces jeux est passée de mode, ou inconnue à presque toutes les personnes qui consacrent leur tems à l'étude. Les exemples que je crois nécessaire d'offrir à mes lecteurs, seront donc des problèmes tenant à des combinaisons simples ou susceptibles d'être énoncés en termes généraux, et choisis pour donner une idée des divers procédés de calcul employés dans cette branche des mathématiques.

Soit proposé d'abord de *déterminer la probabilité qu'en prenant au hasard dans un tas composé de m pièces, on en ôtera un nombre pair ou un nombre impair?* Cette question peut être donnée en exemple de la nécessité de se défier d'un premier aperçu. Ne serait-il pas naturel en effet de penser que sa solution ne dépend que de la quantité de nombres pairs et de nombres impairs compris entre 1 et $m$ inclusivement. Si $m$ était 5, par exemple, comme il y aurait 3 nombres impairs 1, 3, 5, et seulement 2 nombres pairs 2, 4, on dirait que les probabilités sont $\frac{3}{5}$ pour les premiers et $\frac{2}{5}$ pour les seconds ; et si $m$ était égal à 4, comme on aurait alors 2 nombres impairs et autant de pairs, les deux probabilités seraient égales à $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$.

Il n'en est pourtant pas ainsi ; car en considérant la chose avec attention, on voit que c'est suivant les diverses manières dont elles peuvent se combiner les unes avec les autres, que les pièces d'un tas viennent sous la main, et non pas d'après les diverses manières de partager en deux parties le nombre des pièces de ce tas. Pour le montrer nous désignerons ces pièces par les lettres

$a, b, c, d$; elles pourront se combiner en nombre impair, soit 1 à 1 ou 3 à 3, ce qui fournira les 8 combinaisons

$$a,\ b,\ c,\ d,\ abc,\ abd,\ acd,\ bcd,$$

et en nombre pair, soit 2 à 2 ou les 4 ensemble, ce qui fournira les 7 combinaisons

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd,\ abcd.$$

Chacune de ces combinaisons pouvant tomber également sous la main, il en résulte que la probabilité pour prendre un nombre impair de pièces est $\frac{8}{15}$ et seulement $\frac{7}{15}$ pour un nombre pair.

Maintenant si on se rappelle que les coefficiens des termes du développement de $(x+a)^m$, à partir du second terme, donnent le nombre des combinaisons de $m$ choses prises 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, etc., on aura

$$\frac{m}{1}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}+\text{etc.}=I,$$

pour la totalité des combinaisons en nombre impair, et

$$\frac{m(m-1)}{1.2}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}+\text{etc.}=P$$

pour celle des combinaisons en nombre pair. Après avoir ajouté ces deux expressions, il sera facile de reconnaître dans leur somme, tous les termes du développement de $(1+1)^m$ à l'exception du premier; d'où il résulte que

$$I+P=(1+1)^m-1=2^m-1.$$

En retranchant la première de la seconde, on aura

$$P-I=(1-1)^m-1=-1,$$

d'où l'on conclura sans peine

$$I=2^{m-1},\quad P=2^{m-1}-1\,;$$

et par conséquent si on représente par $e$ la probabilité d'ôter du tas un nombre impair de pièces, et par $f$ celle d'en ôter un nombre pair, on aura

$$e=\frac{2^{m-1}}{2^m-1},\ f=\frac{2^{m-1}-1}{2^m-1}.$$

La première de ces probabilités surpasse toujours la seconde, mais leur limite commune est $\frac{1}{2}$, lorsque le nombre $m$ est supposé infini. Les calculs précédens sont tirés d'un Mémoire que feu M. Bertrand de Genève, a présenté, en 1786, à l'Académie des Sciences de Paris, et qui n'a pas été imprimé; la question se résout aussi par le *calcul aux différences*. *Voyez* la note II à la fin du présent ouvrage.

44. Les probabilités simples des chances de la loterie de France, ne dépendent que des coefficiens des $2^e$—$6^e$ termes du développement de la puissance du binome; et le calcul en est si aisé que je ne m'y arrêterai pas ici, devant d'ailleurs y revenir pour comparer les mises avec les gains: voici sur la même loterie un problème dont la solution est un peu moins facile.

*A chaque tirage il sort* 5 *des* 90 *numéros contenus dans la roue; la probabilité de la sortie d'un numéro donné est donc* $\frac{5}{90}$ *ou* $\frac{1}{18}$; *on a mis sur* 2 *numéros, on demande la probabilité qu'il en sortira au moins* 1? La réponse n'est pas $\frac{2}{18}$; car sur ce pied en ne prenant que 18 numéros on arriverait à $\frac{18}{18}$, ou à la certitude qu'il en sortirait 1 des 18, ce qui est absurde: mais un tirage étant une combinaison de 5 quelconques

des 90 numéros de la loterie, peut avoir lieu de

$$\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} \text{ manières,}$$

parmi lesquelles on a en sa faveur toutes celles qui renferment l'un des numéros sûr lesquels on a mis, ou tous les deux.

Pour former les premières, il faut prendre les combinaisons 4 à 4 des 88 numéros différens de ceux sur lesquels on a mis, et y joindre alternativement chacun de ces derniers, ce qui donnera

$$2.\frac{88.87.86.85}{1.2.3.4} \text{ combinaisons favorables;}$$

prenant ensuite les combinaisons 3 à 3 des 88 numéros déjà indiqués, pour y joindre à la fois les deux sur lesquels on a mis, on aura encore

$$\frac{88.87.86}{1.2.3} \text{ combinaisons favorables:}$$

divisant les deux dernières expressions par la première, et supprimant les facteurs communs au dividende et au diviseur, on trouvera

$$\frac{85}{9.89}+\frac{2}{9.89}=\frac{87}{9.89}=\frac{87}{801}<\frac{1}{9}.$$

45. En raisonnant de même sur une loterie composée de $p$ numéros, dont il en sort $q$ à chaque tirage, pour obtenir la probabilité que sur $s$ numéros désignés, il en sortira $t$, on formera d'abord l'expression du nombre des combinaisons des $p-s$ numéros restans, pris en nombre $q-t$, et qui sera

$$\frac{(p-s)(p-s-1)\ldots\ldots(p-s-(q-t)+1)}{1.2.3\ldots\ldots(q-t)};$$

considérant ensuite que les $s$ numéros désignés, pris en nombre $t$, peuvent se combiner de

$$\frac{s(s-1)\ldots(s-t+1)}{1.2.3\ldots t}$$

manières, on multipliera cette dernière expression par la précédente, pour obtenir le nombre de chances favorables à l'événement desiré. Quant au nombre total des chances, ce sera celui des combinaisons que donnent les $p$ numéros dont se compose la loterie, pris en nombre $q$, c'est-à-dire,

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots q}:$$

la probabilité cherchée sera donc

$$\frac{(p-s)(p-s-1)\ldots(p-s-(q-t)+1)}{1.2.3\ldots(q-t)}$$
$$\times\frac{s(s-1)\ldots(s-t+1)}{1.2.3\ldots t}\times\frac{1.2.3\ldots q}{p(p-1)\ldots(p-q+1)},$$

formule qui peut se réduire, en supprimant les facteurs $1.2.3\ldots(q-t)$, dans le diviseur et dans le dividende.

Si la question ne portait pas sur la sortie d'un nombre précis de numéros, mais seulement sur ce qu'il n'en sortît pas moins d'un nombre donné $h$, il faudrait alors mettre successivement à la place de $t$ les nombres

$$h,\ h+1,\ h+2,\ldots$$

jusqu'à $q$, si $s > q$, ou jusqu'à $s$, dans le cas contraire.

46. Supposons, par exemple, qu'on ait pris 18 numéros; en suivant la marche tracée précédemment, on trouvera sans peine les probabilités ci-dessous: d'abord qu'il ne sortira aucun de ces numéros,

$$\frac{72.71.70.69.68}{1.2.3.4.5}\times\frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=0,3184,$$

ou qu'il en sortira

$$1\ldots\frac{72.71.70.69}{1.2.3.4}\times\frac{18}{1}\times\frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=0,4213,$$

$$2\ldots\frac{72.71.70}{1.2.3}\times\frac{18.17}{1.2}\times\frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=0,2076,$$

$$3\ldots\frac{72.71}{1.2}\times\frac{18.17.16}{1.2.3}\times\frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=0,0475,$$

$$4\ldots\frac{72}{1}\times\frac{18.17.16.15}{1.2.3.4}\times\frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=0,0050,$$

$$5\ldots\quad\frac{18.17.16.15.14}{1.2.3.4.5}\times\frac{1.2.3.4.5}{90.89.88.87.86}=0,0002,$$

la somme des cinq dernières probabilités, ou, ce qui est plus simple, l'excès de l'unité sur la première, égal à $\frac{6816}{10000}$, donnera la probabilité qu'il sortira au moins 1 des 18 numéros choisis.

47. Huygens, l'un des premiers géomètres qui se soient occupés du calcul des probabilités, a terminé l'écrit intitulé *De Ratiociniis in ludo aleæ* (*Opera varia*, tome IV, pag. 727), par cinq problèmes pour quatre desquels il n'a fait qu'indiquer les nombres de la solution, et dans le second, il n'a rien ajouté à l'énoncé que voici : *Trois joueurs* A, B, C, *ayant réuni* 12 *jetons, dont* 4 *sont blancs et* 8 *noirs, conviennent que celui d'entr'eux qui, les yeux bandés, tirera le premier un jeton blanc, gagnera. C'est* A *qui doit tirer le premier*, B *le second et* C *le troisième; on demande la probabilité que chacun a en sa faveur?* Cet énoncé a présenté deux sens différens à Montmort et à Moivre (*).

(*) Voyez l'*Analyse des hasards* de Montmort, pag. 364, les

Le premier croyait que le jeton tiré devait être remis chaque fois au tas, afin que les probabilités restassent les mêmes dans toutes les épreuves. Moivre pensait le contraire, et dans ce sens qui complique un peu la question, il l'a résolue fort simplement au moyen des probabilités composées : c'est ce qu'on va voir.*

Soit $m$ le nombre des jetons blancs et $n$ celui des jetons noirs. Au premier tirage où le nombre des jetons de chaque espèce est complet, il y aura pour la sortie d'un jeton blanc, ce qui fait gagner $A$, la probabilité $\frac{m}{m+n}$, et pour la sortie d'un jeton noir, $\frac{n}{m+n}$.... Cette dernière probabilité sera aussi celle du second tirage, dans lequel le nombre des jetons noirs, diminué de celui qu'a tiré le joueur $A$, sera réduit à $n-1$. En conséquence les probabilités dans ce tirage seront

$\frac{m}{m+n-1}$ d'amener un jeton blanc,

$\frac{n}{m+n-1}$ d'amener un jeton noir ;

il faudra les multiplier par la probabilité particulière du tirage pour avoir celles des deux événemens qui en résultent (17), et cela donnera les probabilités

$\frac{n}{m+n} \cdot \frac{m}{m+n-1}$ en faveur de $B$,

$\frac{n}{m+n} \cdot \frac{n-1}{m+n-1}$ contre $B$, ou celle du 3e tirage.

Si $B$ amène un jeton noir, il n'en restera plus au tas que $n-2$ ; et en raisonnant pour ce tirage comme

* *Miscellanea analytica* de Moivre, pag. 199, et l'*Ars conjectandi* de Jacques Bernoulli, pag. 57.

pour le précédent, on trouvera les probabilités

$$\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} \cdot \frac{m}{m+n-2} \text{ en faveur de } C,$$

$$\frac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)} \cdot \frac{n-2}{m+n-2} \text{ contre } C, \text{ ou celle du } 4^e \text{ tir.}$$

Si $C$ n'amène qu'un jeton noir, $A$ tirera de nouveau, du tas où le nombre de jetons noirs sera réduit à $n-3$; il aura donc la probabilité

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} \cdot \frac{m}{m+n-3} \text{ de gagner.}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)} \cdot \frac{n-3}{m+n-3} \text{ de perdre.}$$

En continuant ainsi, et pour abréger faisant $m+n=t$, on formera la suite

$$\frac{m}{t}, \frac{mn}{t(t-1)}, \quad \frac{mn(n-1)}{t(t-1)(t-2)},$$

$$\frac{mn(n-1)(n-2)}{t(t-1)(t-2)(t-3)}, \quad \frac{mn(n-1)(n-2)(n-3)}{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)},$$

$$\frac{mn(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{t(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)(t-5)}, \text{ etc.}$$

dans laquelle les $1^{er}$, $4^e$, $7^e$, etc. termes expriment les probabilités en faveur du joueur $A$, les $2^e$, $5^e$, $8^e$, etc. les probabilités en faveur du joueur $B$; enfin les $3^e$, $6^e$, $9^e$, etc. les probabilités en faveur du joueur $C$. Il est visible que le jeu finit au plus tard lorsque le nombre des jetons noirs est épuisé; et que la probabilité totale pour chaque joueur se forme en ajoutant celles

qu'il a dans chaque tirage. Le calcul des termes de la suite indiquée devient très-facile quand on rapporte chaque terme à celui qui le précède, comme je l'ai fait dans le n° 27.

Les nombres proposés par Huygens donnant

$$m=4, \quad n=8, \quad t=12,$$

on trouvera pour le joueur $A$, la probabilité

$$\frac{4}{12}+\frac{4}{12}\,\frac{8.7.6}{11.10.9}+\frac{4}{12}\,\frac{8.7.6.5.4.3}{11.10.9.8.7.6};$$

pour le joueur $B$, la probabilité

$$\frac{4}{12}\,\frac{8}{11}+\frac{4}{12}\,\frac{8.7.6.5}{11.10.9.8}+\frac{4}{12}\,\frac{8.7.6.5.4.3.2}{11.10.9.8.7.6.5};$$

pour le joueur $C$, la probabilité

$$\frac{4}{12}\,\frac{8.7}{11.10}+\frac{4}{12}\,\frac{8.7.6.5.4}{11.10.9.8.7}+\frac{4}{12}\,\frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{11.10.9.8.7.6.5.4}.$$

Réduisant toutes ces fractions au dénominateur commun, le plus simple qu'elles puissent avoir, les sommes ci-dessus deviennent respectivement

$$\frac{77}{165}, \quad \frac{53}{165}, \quad \frac{35}{165}.$$

48. Les épreuves répétées que suppose le problème dont je viens de rapporter la solution, diffèrent de celles que j'ai considérées dans le n° 20, en ce que le nombre des chances diminue à chaque épreuve. Ce genre de hasard ne peut être assimilé au jet des dés; il revient au tirage dans une urne où l'on ne remet point les boules qui en sont sorties. Les formules qui, dans cette hypothèse, remplacent le développement des

puissances du binome $m + n$, sont assez remarquables pour trouver place ici, et complètent ce qui a été dit sur les épreuves répétées.

Soit une urne contenant $m$ boules blanches, $n$ boules noires; si l'on désigne par $A$ la sortie d'une boule blanche, par $B$ celle d'une boule noire, que pour abréger on fasse $m + n = t$, et que l'on ait soin, après chaque tirage, d'ôter 1 tant du nombre total des boules que du nombre de celles qui sont de la couleur supposée sortie à ce tirage, on trouvera par le principe des probabilités composées, les suivantes.

Au 1[er] tirage,

pour $A$, $\frac{m}{t}$, pour $B$, $\frac{n}{t}$.

Au 2[e] tirage,

pour $AA$, $\frac{m(m-1)}{t(t-1)}$, pour $AB$, $\frac{mn}{t(t-1)}$,

$BB$, $\frac{n(n-1)}{t(t-1)}$, $BA$, $\frac{nm}{t(t-1)}$.

Au 3[e] tirage,

pour $AAA$, $\frac{m(m-1)(m-2)}{t(t-1)(t-2)}$, $AAB$, $\frac{m(m-1)n}{t(t-1)(t-2)}$, etc.

$ABA$, $\frac{mn(m-1)}{t(t-1)(t-2)}$,

$BAA$, $\frac{nm(m-1)}{t(t-1)(t-2)}$.

L'examen attentif de ce petit nombre de formules suffit pour faire connaître la loi suivant laquelle se composent toutes les probabilités des diverses successions des événemens $A$ et $B$. Ici, comme dans le n° 21,

les coefficiens s'introduisent dans les successions mélangées, dès qu'on fait abstraction de l'ordre des événemens : la probabilité d'obtenir 2 événemens $A$ et 1 événement $B$, par exemple, sera $3\,\frac{m(m-1)n}{t(t-1)(t-2)}$.

D'après cette observation on verra facilement que la probabilité d'obtenir, dans un nombre $p$ d'épreuves, $p-q$ événemens $A$ et $q$ événemens $B$, sans distinction d'ordre, sera exprimée par

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots\ldots\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots q}\times$$
$$\frac{m(m-1)\ldots(m-(p-q)+1)\times n(n-1)\ldots(n-q+1)}{t(t-1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(t-p+1)} \quad (*)$$

49. La théorie des permutations et des combinaisons est, comme on l'a dû voir dans la plus grande partie de ce qui précède, un des moyens les plus féconds pour résoudre les problèmes concernant le calcul des probabilités. Cette théorie, servant de fondement à la démonstration la plus élémentaire de la formule du binome de Newton, se trouve dans les *Elémens d'Algèbre ;* mais on n'y partage qu'en deux groupes la totalité des lettres dont on cherche les arrangemens divers ; et pour s'élever à toute la généralité que le sujet comporte, il faut déterminer ce qui doit arriver lorsqu'on partage en un nombre quelconque de groupes, le nombre de lettres donné. Les formules propres à cette détermination se trouvent dans le développement des puissances des polynomes.

En raisonnant sur les prodnits des trinomes

$$a' + b' + c',\quad a'' + b'' + c'',\quad a''' + b''' + c''',\ \text{etc.}$$

(*) Cette formule a été indiquée par M. Laplace, dans les *Mémoires des Savans étrangers*, t. VI, pag. 623.

comme on l'a fait dans le n° 21, sur ceux des binomes

$$m'+n',\quad m''+n'',\quad m'''+n''',\ \text{etc.},$$

on verra par les lois de la multiplication, que ces produits comprennent tous les arrangemens qu'on peut faire des lettres

$$a',\ b',\ c',\ a'',\ b'',\ c'',\ a''',\ b''',\ c''',$$

en en prenant une dans chaque facteur du produit. Il suit de là que si les lettres $a$, $b$, $c$, désignaient respectivement le nombre de chances qui amènent les événemens $A$, $B$, $C$, à la 1re, à la 2e, à la 3e etc. épreuves, un produit partiel $a'\ b''\ c'''\ b^{\text{IV}}$, par exemple, ferait connaître le nombre de chances qui répondent à la succession d'événemens simples désignée par $ABCB$.

Quand on supposera que

$$a'=a''=a'''...=a,\ b'=b''=b'''...=b,\ c'=c''=c'''...=c,$$

le produit

$$(a'+b'+c')\ (a''+b''+c'')\ (a'''+b'''+c''')\ \text{etc.}$$

se changera dans le trinome $(a+b+c)$ élevé à une puissance marquée par le nombre des facteurs, ou, ce qui est la même chose, par celui des épreuves ; un terme quelconque de ce produit, $a'b''c'''b^{\text{IV}}$ devenant $ab^2c$, se trouvera répété autant de fois qu'il est possible de former des produits différens contenant les lettres $a$ et $c$ 1 fois chacune, la lettre $b$, 2 fois, et soumises alternativement aux accens $'$, $''$, $'''$, $^{\text{IV}}$ ...., portés jusqu'au nombre marqué par celui des épreuves.

Soit $n$ ce dernier nombre, l'expression du terme général du trinome $(a+b+c)^n$ étant

$$\frac{1.2.3............n}{1.2...p\times 1.2...q\times 1.2...r}\,a^pb^qc^r,\ \text{si}\ p+q+r=n\ (*),$$

(*) Voyez le *Complément des Élémens d'Algèbre*, ou bien l'Introduction placée à la tête du premier volume du *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*.

on a pour le terme $ab^2c$,

$$n=4, \quad p=1, \quad q=2, \quad r=1;$$

ainsi le coefficient de ce terme est 12.

Si donc on fait abstraction de l'ordre dans la succession des événemens, le terme $12ab^2c$, dans le développement de $(a+b+c)^4$, exprimera le nombre de chances pour obtenir, en 4 épreuves, les événemens $A$ et $C$, chacun 1 fois, et l'événement $B$, 2 fois.

Le coefficient 12, provenant de la réunion de termes contenant 4 facteurs différens qui pouvaient se partager en 3 classes, savoir celle des $a$, celle des $b$, et celle des $c$, indique, dans la réunion de ces termes qui laisse subsister les classes, le nombre de manières de partager 4 choses en 3 classes ou groupes, dont 1 est composé de 2 de ces choses, et les 2 autres de 1 seule.

De même le terme général

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots n}{1.2\ldots p \times 1.2\ldots q \times 1.2\ldots r}\, a^p b^q c^r$$

exprime le nombre de chances pour obtenir sur un nombre $p+q+r$ d'épreuves, $p$ événemens $A$, $q$ événemens $B$, $r$ événemens $C$; et le coefficient qui multiplie $a^p b^q c^r$, indique le nombre de manières de distribuer $p+q+r$ choses en 3 groupes, dont le 1er en comprenne un nombre $p$, le 2e un nombre $q$ et le 3e un nombre $r$.

50. Cette dernière proposition se prouve directement, en observant que $p+q+r$ choses, peuvent être combinées $p$ à $p$, en un nombre de manières égal à

$$\frac{(p+q+r)(p+q+r-1)\ldots\ldots(q+r+1)}{1.2.3.\ldots\ldots\ldots\ldots p},$$

et qu'en ôtant $p$ choses sur $p+q+r$, il en reste $q+r$ qu'on peut encore combiner entr'elles en nombre $q$, d'un nombre de manières égal à

$$\frac{(q+r)(q+r-1)\ldots\ldots(r+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\ldots q};$$

ou aura donc en tout un nombre

$$\frac{(p+q+r)(p+q+r-1)\ldots.(r+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots p\times 1.2\ldots q}$$

de manières d'ôter de la totalité des $p+q+r$ choses, deux groupes, le 1[er] contenant un nombre $p$ et le 2[e] un nombre $q$ de ces choses. Si on écrit au numérateur et au dénominateur de l'expression ci-dessus les facteurs $1.2.3\ldots r$, et qu'on y change $p+q+r$ en $n$, on retombera sur la formule du n° précédent.

On aurait les *arrangemens* au lieu des *combinaisons*, si l'on supprimait les denominateurs.

51. En général, tout ce qui regarde les épreuves répétées pour un nombre quelconque d'événemens simples, est compris dans le développement des puissances d'un polynome formé de la somme des nombres qui expriment les chances d'où résulte chacun de ces événemens.

Le terme général du développement de ......... $(a+b+c+d+e)^n$ étant

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots n}{1.2\ldots p.1.2\ldots q.1.2\ldots r.1.2\ldots s.1.2\ldots t}\,a^p b^q c^r d^s e^t,$$

si $p+q+r+s+t=n$, donne le nombre des chances qui peuvent amener l'événement composé d'un nombre $p$ d'événemens $A$,

$q$ .......... $B$,

$r$ .......... $C$,

$s$ .......... $D$,

$t$ .......... $E$;

la probabilité de cet événement composé s'obtiendra donc en divisant l'expression ci-dessus par......... $(a+b+c+d+e)^n$, nombre total des chances.

Il suit de là que pour avoir immédiatement cette probabilité, on peut substituer aux lettres $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, qui marquent le nombre des diverses espèces de chances dans une épreuve, les probabilités simples qui en dérivent.

Le plus probable des événemens composés que peut amener le même nombre d'épreuves, est encore celui dans lequel les événemens simples entrent proportionnellement à leurs probabilités respectives. Si, par exemple, on ne considère que 3 événemens simples, et qu'on fasse $n=m(a+b+c)$, il sera facile de voir que le plus grand terme du développement de $(a+b+c)^{m(a+b+c)}$ est le terme affecté de $a^{ma}b^{mb}c^{mc}$; car en faisant d'abord $b+c=\beta$, et développant $(a+\beta)^{ma+m\beta}$, on aura pour le plus grand terme celui qui est affecté de $a^{ma}\beta^{m\beta}$ (27); mais il peut se développer à son tour, en substituant à $\beta^{m\beta}$ le développement de $(b+c)^{mb+mc}$, dont le plus grand terme est celui qui est affecté de $b^{mb}c^{mc}$; ainsi le plus grand terme du produit $a^{ma}\beta^{m\beta}$ sera donc celui qui est affecté de $a^{ma}b^{mb}c^{mc}$.

52. Pour donner une idée de la multitude à laquelle peut s'élever le nombre des combinaisons, lors même que les élémens n'en sont pas très-nombreux, je vais chercher en combien de manières les 32 cartes d'un jeu de *piquet* peuvent se distribuer entre les deux joueurs, qui, comme l'on sait, en prennent d'abord chacun 12, et entre les deux paquets qui forment le *talon*, dont l'un contient 5 cartes et l'autre 3. Le nombre demandé

étant le coefficient de $a^{12}b^{12}c^5d^3$ dans le développement de $(a+b+c+d)^{32}$, a pour expression

$$\frac{1.2.3\ldots32}{1.2\ldots12\times1.2\ldots12\times1.2\ldots5\times1.2.3}.$$

En y supprimant par ordre, dans le numérateur, tous les facteurs qui composent le dénominateur, elle sera réduite au produit

$$2^7.3^2.5^2.7^2.13^2.17.19.23.29.31$$
$$=1\ 592\ 814\ 947\ 068\ 800.$$

L'usage des cartes à jouer ne paraît pas remonter plus haut que 1392, où on le voit servir à l'amusement du roi de France Charles VI, pendant sa maladie; depuis cette époque, il s'est écoulé 424 années, qui donnent environ 154866 jours.

Si on divise par ce dernier nombre, celui des combinaisons calculées ci-dessus, le quotient 10 285 117 114 indiquera le nombre de coups qu'on aurait dû jouer chaque jour pour que toutes les distributions des 32 cartes se fussent présentées, encore faudrait-il qu'aucune n'eût été répétée.

Enfin si on suppose que sur les 170 000 000 d'individus auxquels on évalue la population de l'Europe, il y en ait la 100^e^ partie qui sache le jeu de piquet, et qu'elle se partage en couples pour s'y livrer exclusivement, on trouvera que chacun de ces couples devrait jouer pour sa part plus de 12000 coups dans un seul jour, ce qui ne se peut, car chaque coup dure au moins 2 à 3 minutes, et les 24 heures n'en contiennent que 1440.

On doit donc regarder comme certain que toutes les combinaisons que peut fournir ce jeu ne se sont pas encore présentées; au reste, ceux qui le connaissent savent bien qu'il ne faut pas confondre le nombre de combinai-

sons avec celui des coups essentiellement différens, qui est beaucoup moindre.

53. C'est au développement des polynomes que Moivre (*Miscellanea analytica*, p. 196), ramène la question de *déterminer la probabilité d'amener un point donné, avec un nombre donné de dés*. Pour suivre sa marche, représentons par $n$ le nombre de ces dés, par $m$ celui des numéros dont chacun est marqué, en commençant à 1, par $p+1$ le numéro qu'on desire amener, et considérons la formation du développement de

$$(f+f^2+f^3\ldots\ldots+f^m)^n,$$

par la multiplication des $n$ facteurs égaux à

$$f+f^2+f^3\ldots\ldots+f^m$$

qu'il contient. D'après ce procédé, il est la réunion de produits partiels composés de facteurs de la forme

$$f^\alpha,\ f^\beta,\ f^\gamma\ldots\text{en nombre } n;$$

et pour l'ordonner suivant les puissances de $f$, il faut rassembler tous les termes où la somme des exposans est la même. Il suit de là que le coefficient du terme pour lequel on aura

$$\alpha+\beta+\gamma\ldots\ldots=p+1,$$

indique le nombre de manières de former le point $p+1$ avec $n$ nombres pris depuis 1 jusqu'à $m$, et donnera la solution du problème proposé.

La recherche de ce coefficient, qui serait assez difficile par la formule rapportée dans le n° 51, se simplifie beaucoup à cause de la forme particulière du polynome à développer. En effet, comme

$$(f+f^2+f^3\ldots f^m)^n=f^n(1+f+f^2\ldots+f^{m-1})^n,$$

et qu'on a vu dans les *Élémens d'Algèbre* que

$$1+f+f^2\ldots+f^{m-1}=\frac{1-f^m}{1-f},$$

il s'ensuit que le développement qu'il faut effectuer revient à celui de

$$\frac{f^n(1-f^m)^n}{(1-f)^n}=f^n(1-f^m)^n(1-f)^{-n};$$

or

$$(1-f^m)^n=1-\frac{n}{1}f^m+\frac{n(n-1)}{1.2}f^{2m}$$
$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}f^{3m}+\text{etc.},$$
$$(1-f)^{-n}=1+\frac{n}{1}f+\frac{n(n+1)}{1.2}f^2$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}f^3+\text{etc.}$$

En mettant à part le premier facteur $f^n$, il restera à trouver dans le produit des deux autres, développés ci-dessus, les termes qui sont affectés de $f^{p+1-n}$; pour cela on prendra d'abord dans la série inférieure le terme affecté de $f^{p+1-n}$, pour multiplier le premier terme 1 de la série supérieure; puis on reculera dans la seconde série jusqu'au terme affecté de $f^{p+1-n-m}$, pour multiplier le terme affecté de $f^m$ dans la première série; et continuant ainsi de rétrograder de $m$ termes dans la série inférieure, pour avancer de 1 terme dans la série supérieure, on obtiendra pour le coefficient cherché

$$\frac{n(n+1)\ldots p}{1.2\ldots(p+1-n)}-\frac{n(n+1)\ldots(p-m)}{1.2\ldots(p+1-n-m)}\times\frac{n}{1}$$
$$+\frac{n(n+1)\ldots(p-2m)}{1.2\ldots(p+1-n-2m)}\times\frac{n(n-1)}{1.2}-\text{etc.}$$

série qu'il faudra continuer tant qu'on ne rencontrera ; dans les produits indiqués, aucun facteur qui soit nul ou négatif.

On lui fait prendre une forme plus élégante, en observant que si $p+1-n>n-1$ ; on peut supprimer dans le premier terme, comme se trouvant à la fois au numérateur et au dénominateur, tous les facteurs depuis $p+1-n$ jusqu'à $n-1$, et les introduire, au contraire, si $p+1-n<n-1$. Avec cette attention et en renversant l'ordre des facteurs, le premier terme devient

$$\frac{p(p-1)\ldots\ldots(p-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)},$$

ce qui met sur la voie des changemens analogues à faire dans les autres ; et si, pour abréger, on pose

$$p-m=p', \quad p-2m=p'', \quad p-3m=p''', \text{ etc.}$$

on obtient la formule

$$\frac{p(p-1)\ldots\ldots(p-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}$$
$$-\frac{p'(p'-1)\ldots\ldots(p'-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\times\frac{n}{1}$$
$$+\frac{p''(p''-1)\ldots\ldots(p''-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{1.2}$$
$$-\frac{p'''(p'''-1)\ldots\ldots(p'''-n+2)}{1.2.3\ldots\ldots(n-1)}\times\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$
$$+\text{etc.},$$

semblable à celle de Moivre. En l'appliquant, comme lui, à chercher le nombre de manières d'amener le point 16 avec 4 dés ordinaires, on doit prendre

$$p=15, \quad n=4, \quad m=6, \quad p'=9, \quad p''=3,$$

ce qui donne

$$\frac{15.14.13}{1.2.3}-\frac{9.8.7}{1.2.3}.\frac{4}{1}+\frac{3.2.1}{1.2.3}.\frac{4.3}{1.2}=125.$$

Ce nombre étant divisé par $6^4=1296$, qui marque celui de toutes les chances possibles dans le jet simultané de 4 dés, on aura la probabilité $\frac{125}{1296}$, environ $\frac{1}{10}$, d'amener avec ces dés le point 16.

En ne supposant que 3 dés et cherchant le nombre de manières d'amener les points 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10, on trouvera pour la somme des résultats 108, moitié de $6^3=216$, nombre total des chances; il est donc également probable, avec 3 dés, d'amener dans un seul jet un point inférieur à 11 ou supérieur à 10. Cette remarque est le fondement du jeu nommé *passe dix*.

54. Je terminerai cette suite de questions par la recherche de la probabilité que tous les numéros d'une loterie seront sortis après un nombre donné de tirages, problème qu'Euler et M. Laplace ont résolu par des moyens très-différens.

La considération du polynome y serait applicable aussi; mais ne me paraissant pas devoir mener facilement à la solution générale, je vais passer à l'explication de la formule donnée par Euler (*Opuscula analytica*, t. II; p. 333). On trouvera dans la note II la solution de M. Laplace.

*Soit* m *le nombre des numéros dont se compose la loterie et dont il en sort* i *à chaque tirage; on demande la probabilité que tous seront sortis dans* n *tirages ?*

Les chances également possibles dans un tirage sont toutes les combinaisons qu'on peut faire des $m$ numéros, pris en nombre $i$; celui de ces chances aura donc pour

6..

expression

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i}.$$

Désignons-le, pour abréger, par $P_m$, afin de pouvoir représenter par $P_{m-1}$, $P_{m-2}$, etc. ce qu'il devient quand on y change $m$ en $m-1$, $m-2$, etc.; et pour éviter toute confusion, substituons les lettres $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, etc. aux numéros de la loterie. Cela posé, $n$ tirages donneront $(P_m)^n = P_m^n$ arrangemens des premières chances prises $n$ à $n$, parmi lesquels se trouveront compris, tant ceux qui contiennent toutes les lettres, que ceux où il en manque quelques-unes; la question se réduit évidemment à soustraire ces derniers du nombre total, pour arriver à l'expression du nombre de ceux qui remplissent la condition du problème. Il est d'abord évident que les arrangemens qui ne contiennent pas une lettre désignée, $a$ par exemple, se trouveraient tous dans une loterie formée des $m-1$ lettres restantes; qu'ils sont par conséquent au nombre de $P_{m-1}^n$, et qu'en exceptant ainsi chaque lettre à son tour, on aura déjà $mP_{m-1}^n$ arrangemens à ôter de $P_m^n$, ce qui donnera

$$P_m^n - \frac{m}{1} P_{m-1}^n.$$

Mais il faut observer que parmi les arrangemens qui ne contiennent point la lettre $a$, se trouvent ceux qui ne renferment en même tems ni $a$, ni $b$, qui de même se trouvent aussi parmi les arrangemens ne renfermant point $b$; chacun de ceux où il manque 2 lettres a donc été retranché 2 fois, lorsqu'on a ôté de $P_m^n$ les

arrangemens où il manque une lettre; or les premiers, qui sont au nombre de $\frac{m(m-1)}{1.2} P^n_{m-2}$, n'auraient dû être retranchés qu'une seule fois : il faut donc les ajouter 1 fois à l'expression formée ci-dessus, et l'on aura

$$P^n_m - \frac{m}{1} P^n_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} P^n_{m-2}.$$

Les arrangemens où il manque 3 lettres, $a$, $b$, $c$, par exemple, ont été retranchés d'abord 3 fois, savoir, avec ceux où $a$ manque, où $b$ manque, où $c$ manque; ils ont été ensuite ajoutés 3 fois, savoir, avec les arrangemens où $a$ et $b$ manquent en même tems, ou bien $a$ et $c$, ou bien $b$ et $c$. Si on les a ôtés d'un côté 3 fois, on les a remis autant de l'autre; il faut donc les soustraire de nouveau, et leur nombre étant $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} P^n_{m-3}$, on aura, après cette opération,

$$P^n_m - \frac{m}{1} P^n_{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} P^n_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} P^n_{m-3}.$$

Passant aux arrangemens où il manque 4 lettres, on verra de même qu'ils ont été retranchés 4 fois avec ceux où il manque 1 lettre, ajoutés 6 fois avec ceux où il manque 2 lettres, et retranchés 4 fois avec ceux où il manque 3 lettres; ayant donc été retranchés 2 fois de plus qu'ils n'ont été ajoutés, il faut les ajouter encore 1 fois, et leur nombre étant $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} P^n_{m-4}$, il en résultera

$$P_m^n - \frac{m}{1} P_{m-1}^n + \frac{m(m-1)}{1.2} P_{m-2}^n$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} P_{m-3}^n$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} P_{m-4}^n.$$

La loi de cette expression est maintenant assez évidente pour qu'on puisse la pousser aussi loin qu'on le voudra; mais pour en constater la vérité indépendamment de toute induction, il suffit d'observer qu'un arrangement où il manque un nombre $p$ de lettres, est retranché $\frac{p}{1}$ fois avec ceux où il en manque 1, ajouté $\frac{p(p-1)}{1.2}$ fois avec ceux où il en manque 2, retranché $\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}$ fois avec ceux où il en manque 3, et ainsi de suite, ce qui donne pour résultat l'expression

$$-\frac{p}{1} + \frac{p(p-1)}{1.2} - \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} \ldots\ldots \pm \frac{p}{1},$$

renfermant tous les termes du développement de $(1-1)^p$, à l'exception du premier terme, qui est $+1$, et du dernier, qui est $\mp 1$, selon que $p$ est impair ou pair. L'expression ci-dessus est donc égale à o dans le premier cas, et à $-2$ dans le second; il faudra par conséquent joindre à l'expression du nombre des arrangemens cherchés le terme

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-p+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots p} P_{m-p}^n,$$

avec le signe — si $p$ est impair, et le signe + si ce nombre est pair.

Le problème proposé est donc complètement résolu par la formule

$$P^n_m - \frac{m}{1} P^n_{m-1} \ldots \pm \frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{1.2.\ldots.p} P^n_{m-p},$$

tant qu'on se borne aux considérations algébriques, puisque cette formule donne le nombre de chances favorables à l'événement desiré, et qu'en la divisant par $P^n_m$, nombre total des chances, on aura la probabilité demandée, que tous les numéros de la loterie seront sortis dans un nombre $n$ de tirages.

On voit que la question suppose $n > \frac{m}{i}$; et Euler remarque en effet que la formule ci-dessus demeure nulle tant que $n < \frac{m}{i}$; de plus, il faut, dans les valeurs de $p$, s'arrêter à $p = m - i$.

Il est à propos d'observer aussi que $P^n_m$ se réduirait à $m^n$, s'il ne sortait qu'un numéro à chaque tirage, c'est-à-dire si l'on avait $i = 1$.

55. Euler a montré que pour mettre facilement en nombres la formule ci-dessus, lorsque $m$ et $n$ étaient des nombres considérables, il suffisait de calculer le logarithme du rapport de chaque terme avec celui qui le précède.

En effet, si pour abréger, on pose

$$\frac{m}{1} P^n_{m-1} = A, \quad \frac{m(m-1)}{1.2} P^n_{m-2} = B,$$
$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} P^n_{m-3} = C, \text{ etc.},$$

on aura

$$\frac{A}{P^n_m} = m\,\frac{P^n_{m-1}}{P^n_m}\,,\qquad \frac{B}{A} = \frac{m-1}{2}\,\frac{P^n_{m-2}}{P^n_{m-1}}\,,$$

$$\frac{C}{B} = \frac{m-2}{3}\,\frac{P^n_{m-3}}{P^n_{m-2}}\,,\quad \text{etc.}\,;$$

puis remontant aux valeurs de $P^n_m$, $P^n_{m-1}$, $P^n_{m-2}$, etc.
on obtiendra

$$\frac{P^n_{m-1}}{P^n_m} = \left\{\frac{(m-1)\ldots(m-i)}{m(m-1)\ldots(m-i+1)}\right\}^n = \left(\frac{m-i}{m}\right)^n,$$

$$\frac{P^n_{m-2}}{P^n_{m-1}} = \left\{\frac{(m-2)\ldots(m-i-1)}{(m-1)(m-2)\ldots(m-i)}\right\}^n = \left(\frac{m-i-1}{m-1}\right)^n,$$

etc. ;

d'où l'on conclura

$$\frac{A}{P^n_m} = \frac{m}{1}\left(\frac{m-i}{m}\right)^n,\qquad \frac{B}{A} = \frac{m-1}{2}\left(\frac{m-i-1}{m-1}\right)^n,$$

$$\frac{C}{B} = \frac{m-2}{3}\left(\frac{m-i-2}{m-2}\right)^n,\quad \text{etc.}\,;$$

passant aux logarithmes, on aura

$$1\frac{A}{P^n_m} = 1\,m - n\,1\,\frac{m}{m-i}\,;$$

$$1\frac{B}{A} = 1\,\frac{m-1}{2} - n\,1\,\frac{m-1}{m-i-1}\,;$$

$$1\frac{C}{B} = 1\,\frac{m-2}{3} - n\,1\,\frac{m-2}{m-i-2}\,,$$

etc. ;

et en observant que

$$1\frac{B}{P^n_m} = 1\frac{A}{P^n_m} + 1\frac{B}{A},\quad 1\frac{C}{P^n_m} = 1\frac{B}{P^n_m} + 1\frac{C}{B}, \text{ etc.},$$

on déterminera, par une suite d'autant plus convergente que le nombre $n$ sera grand, le rapport de chaque terme de la formule proposée, comparé au premier, ce qui donnera la probabilité demandée ; car cette formule étant divisée par $P^n_m$, devient, par les dénominations employées ci-dessus,

$$1 - \frac{A}{P^n_m} + \frac{B}{P^n_m} - \frac{C}{P^n_m} + \text{etc.}$$

En prenant $m = 90$, $i = 5$, $n = 100$, on obtient, au moyen des six premiers termes de la formule, pour la probabilité de la sortie des 90 numéros de la loterie de France, la fraction 0,7410, exacte à moins de $\frac{1}{10000}$, et qui surpasse beaucoup $\frac{1}{2}$ (*). Il ne serait pas difficile, en rétrogradant, de s'assurer que c'est du 85e au 86e tirage que cette probabilité passe au-delà de $\frac{1}{2}$. En portant le nombre des tirages à 200, il suffit des deux premiers termes de la formule, qui donnent 0,9990, probabilité très-peu différente de 1.

Dans le Mémoire cité, Euler ne se borne pas au problème dont je viens de donner la solution ; il cherche aussi les probabilités pour la sortie de $m-1$, $m-2$, etc. numéros, et parvient à des expressions très-remar-

(*) Euler trouve 0,7419; mais Trembley qui est revenu sur cette question dans les *Mémoires de l'Academ. de Berlin*, ann. 1794 et 1795 (pag. 76) ayant mis plus d'exactitude dans les calculs, est parvenu au nombre rapporté ci-dessus.

quables. J'indiquerai également aux lecteurs un Mémoire inséré dans ceux de l'Académie de Berlin, pour l'année 1751, où il détermine les probabilités dans le jeu de cartes appelé *jeu de rencontre*. Le seul emploi de la théorie des permutations le conduit à des résultats très-élégans et très-curieux.

*De la Règle des Paris, et de l'espérance mathématique.*

56. Jusqu'ici je n'ai encore considéré les probabilités qu'en elles-mêmes; mais le plus souvent on ne les calcule que pour régler la mise et le gain dans les jeux, et en général pour apprécier l'avantage ou le désavantage pécuniaire des spéculations fondées sur des événemens incertains. Avant qu'aucune théorie mathématique eût éclairé celle des hasards, on s'était déjà entendu pour *regarder comme équitable tout pari dans lequel les parieurs déposent des sommes proportionnelles au nombre des chances qui les feraient gagner.* Celui qui, dans le jet d'un dé à 6 faces, parierait d'amener une face désignée, ne devrait déposer au jeu que la 5ᵉ partie de ce qu'y mettrait son adversaire, puisqu'il n'aurait en sa faveur que 1 chance, tandis que l'autre en aurait 5.

Quelque naturelle que soit cette conclusion, on la rendra peut-être encore plus évidente, en concevant d'abord que chaque face du dé soit assignée à un parieur différent, et que la somme mise au jeu doit échoir à celui qui aura désigné la face amenée par le jet. Il n'y a pas de raison alors pour que la mise de l'un de ces joueurs soit plus considérable que celle de tout autre. Son gain sera donc quintuple de cette mise, et si quelqu'un voulait se substituer aux 5 autres, avant que le sort eût prononcé, il devrait nécessairement leur rendre leur mise; il déposerait donc 5 fois autant

que le premier, c'est-à-dire précisément en raison du nombre des chances qui sont en sa faveur.

Ce que je viens de dire sur l'exemple précédent s'appliquerait également à de plus compliqués; on peut concevoir de même que 36 parieurs se sont distribué toutes les chances comprises dans le tableau de la page 7; chacun de ces parieurs doit déposer la même somme au jeu, et la totalité des mises formerait le gain d'un seul, si la condition à remplir était l'arrivée de la chance dont il a fait choix; mais si cette condition est seulement d'amener avec les deux dés un point désigné, tous ceux des joueurs qui ont pris une des chances formant ce point ont un droit égal au gain; ils devront donc le prendre en commun, pour se le partager également. Si le point dont il s'agit est 8, par exemple, il y aura 5 gagnans, puisque ce point résulte de 5 chances; le fonds du jeu, composé de 36 mises particulières, sera donc acquis par 5. Si donc on remplace par un seul individu ceux qui ont les chances favorables au point 8, et par un second ceux qui ont toutes les autres, on voit que leurs mises respectives seront dans le rapport de 5 à 31, c'est-à-dire proportionnelles au nombre de chances qui les font gagner.

Ces considérations, dont Moivre paraît avoir fait usage le premier (*Doctrine of chances*, p. 3), justifient suffisamment, ce me semble, le principe posé ci-dessus, d'après lequel, si deux joueurs, ayant en leur faveur les probabilités $e$ et $f$, déposent des sommes $a$ et $b$, il faut, pour former un pari équitable, qu'il y ait la proportion:

$$a : b :: e : f, \quad \text{d'où} \quad af = be.$$

57. Ce principe suffit pour tous les cas où le hasard

décide en une seule épreuve, parce qu'alors la condition des joueurs ne change que par la conclusion de l'événement ; ensorte que si la volonté des joueurs, ou un empêchement quelconque s'opposait à ce que le hasard, d'où dépend le jeu, fût tenté, chacun d'eux renonçant aux chances qu'il avait acquises par sa mise au jeu, la reprendrait en entier. Il n'en est pas de même quand, pour terminer le jeu, il faut des épreuves répétées, et que quelques-unes ayant déjà eu lieu, ont modifié le nombre des chances favorables aux divers joueurs ; leur esperance a changé, et avec elle leur droit sur le fonds du jeu. C'est sur ce nouveau pied qu'il faut régler le partage entr'eux, en s'appuyant sur la convention généralement établie dans tous les jeux, d'après laquelle *tout joueur perd la propriété de l'argent qu'il dépose, mais acquiert en revanche sur le fonds du jeu un droit proportionnel à la probabilité qu'il a de gagner ce fonds.*

Par exemple, une personne parie d'amener deux fois le même point dans deux jets consécutifs d'un dé à 6 faces ; la probabilité de cet événement étant seulement $\frac{1}{36}$, et celle de l'événement contraire $\frac{35}{36}$, cette personne ne doit mettre au jeu que $1^{fr.}$ et son adversaire 35. Posons que le premier jet ayant eu lieu, le point désigné a paru, et qu'alors les joueurs veuillent se séparer ; celui qui a parié d'amener le point désigné aurait encore au second jet 1 chance pour lui et seulement 5 contre ; son espérance est donc très-différente de ce qu'elle était avant le premier jet. Dans ce cas, la mise totale étant considérée comme appartenant au jeu, toutes les chances également possibles ont un droit égal au partage de cette somme, et celui qui réunit plusieurs chances doit avoir les parts correspondantes : ainsi le premier joueur prendra le 6$^e$ de la mise totale, ou $6^{fr.}$, et son adversaire les $\frac{5}{6}$, ou $30^{fr.}$

58. Sous cette dernière forme, la règle des paris servant à partager la somme déposée par les joueurs, avant que le sort ait prononcé entr'eux, prend le nom de règle des *partis* (*). L'application que Pascal en a faite aux questions que lui proposait le chevalier de Méré, déjà cité (23), a donné naissance au calcul des probabilités. Voici l'une des plus simples de ces questions : *Deux joueurs ont formé un fonds destiné à celui qui aura le plus tôt gagné trois parties; ils se séparent lorsque le premier en a gagné deux et le second une; on demande la part que chacun doit avoir sur le fonds du jeu, en supposant que la probabilité de gagner isolément une partie soit* $\frac{1}{2}$ *pour chaque joueur?*

La considération des probabilités composées résout bien facilement cette question. S'il était joué une partie de plus et que le premier joueur la gagnât, il aurait la mise totale; la probabilité de cet événement est $\frac{1}{2}$. S'il n'arrivait pas, chacun des joueurs ayant alors gagné deux parties, la suivante déciderait nécessairement leur sort; mais la probabilité qu'elle serait jouée étant $\frac{1}{2}$, on aura $\frac{1}{4}$ pour la probabilité qu'elle serait gagnée par le premier joueur, et de même pour le second. Or cette dernière probabilité est la seule que le second joueur ait de gagner, tandis que le premier avait $\frac{1}{2}$ dès la partie précédente; les probabilités totales sont par conséquent

$$\text{pour le 1}^{\text{er}}\text{ joueur, } \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}, \quad \text{et pour le 2}^{\text{e}}, \ \frac{1}{4}.$$

Si donc le fonds du jeu était de 64 pistoles, comme

(*) Le mot *parti* étant pris dans le sens de distribution. De là est venue cette façon de parler; *faire à quelqu'un un bon parti*; ce serait une faute que de dire la règle des *parties*.

le suppose Pascal, le premier joueur devrait en prendre les $\frac{3}{4}$, ou 48 pistoles, et l'autre $\frac{1}{4}$ seulement, ou 16. Quelque simple qu'il soit, cet exemple peut suffire pour montrer ce qu'il faut faire dans tous ceux qui pourront se présenter, et réduit la difficulté au développement de tous les événemens possibles, jusqu'à celui qui amène la décision du sort.

Pascal ne poussait pas le calcul si loin, dans l'exemple ci-dessus; il se bornait à chercher ce qui arriverait si la 4ᵉ partie était jouée. Dans le cas où le premier joueur la perdrait, les deux ayant gagné chacun le même nombre de parties, auraient droit à la moitié des 64 pistoles: « Dono s'ils ne veulent point » hasarder cette partie, le premier doit dire: Je suis » sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les » donne; mais pour les autres, peut-être je les aurai, » peut-être vous les aurez; le hasard est égal, par- » tageons donc ces 32 pistoles par la moitié, et don- » nez-moi, outre cela, mes 32 pistoles qui me sont » sûres. Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16. » (*Œuvres de Pascal*, t. IV, p. 413.) Ce résultat est le même que celui du calcul des probabilités composées, et le raisonnement paraît ici beaucoup plus simple; mais il perd cet avantage dans les cas plus compliqués, qu'il ne résout qu'en les faisant dépendre les uns des autres, jusqu'à ce qu'ils retombent dans celui-ci.

Fermat, qui s'occupait du problème des *partis* en même tems que Pascal, y appliquait la méthode des combinaisons, plus simple et aussi plus générale, puisqu'elle s'étend à un nombre quelconque de joueurs, au lieu que celle de Pascal ne pouvait aller jusqu'à trois; il eut même quelque peine à concevoir l'emploi des combinaisons, lorsqu'il s'agissait de trois joueurs.

59. La séparation des joueurs avant la décision du

sort, qui peut n'être qu'un objet de convenance ou seulement de spéculation, devient nécessaire dans le cas où le terme du jeu cesse d'être assignable, comme cela est possible, du moins mathématiquement, dans les parties jouées en *rabattant*, c'est-à-dire en ne comptant jamais que l'excès du nombre de coups gagnés par un joueur, sur le nombre de ceux que l'autre a gagnés, de sorte que le gain total, ou la fin de la partie, dépende d'obtenir, non pas un nombre donné de points, mais un nombre qui surpasse d'un excès donné, celui des points gagnés par l'autre joueur.

Pour éclaircir ceci par un exemple, montrons ce qui peut arriver lorsque l'excès de points qui fait gagner est égal à 2; désignons par $A$ et $B$ les joueurs, ainsi que les points qu'ils gagnent, et supposons que la probabilité d'obtenir un point soit $\frac{1}{2}$. Il est évident que tous les arrangemens dans lesquels la même lettre se trouve aux deux premières places, doivent être exclus dès qu'il y a plus de deux places, puisqu'ils désignent un coup qui ne pourrait se présenter qu'après la terminaison du jeu; ainsi l'arrangement $AA$ faisant gagner le joueur $A$, exclut l'arrangement $AAB$. On voit aussi que la même lettre ne saurait se trouver plus de 3 fois de suite après la première place; l'arrangement $BAAAAB$, par exemple, ne peut entrer dans ceux du 6$^e$ coup, puisqu'il dérive de l'arrangement $BAAA$, qui terminerait le jeu au 4$^e$ coup. D'après ces observations, on trouvera que les divers événemens possibles sont :

| au 1$^{er}$ coup, | au 2$^e$, | au 3$^e$, | au 4$^e$, etc. |
|---|---|---|---|
| $A$ | $AA$ | $ABA$ | $ABAA$ |
| ou $B$ | $AB$ | $ABB$ | $ABAB$ |
| | $BA$ | $BAA$ | $ABBA$ |
| | $BB$ | $BAB$ | $ABBB$ |
| | | | $BAAA$ |
| | | | $BAAB$ |
| | | | $BABA$ |
| | | | $BABB$. |

En cherchant d'abord, dans ce tableau, dont la continuation ne presente aucune difficulté, les arrangemens où le nombre des répétitions d'une même lettre surpasse de 2 celui des répétitions de l'autre lettre, et qui terminent le jeu, on en trouvera 2 au 2$^e$ coup, savoir, $AA$ et $BB$; 4 au 4$^e$ coup, savoir,

$ABAA$, $ABBB$, $BAAA$, $BABB$,

et ainsi de suite. Les probabilités étant $\frac{1}{4}$ pour chaque événement du 2$^e$ coup, $\frac{1}{8}$ pour ceux du 3$^e$, $\frac{1}{16}$ pour ceux du 4$^e$, etc.; on aura la probabilité $2.\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ que la partie se terminera au 2$^e$ coup, $4.\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$ qu'elle finira précisément au 4$^e$ coup, et par conséquent, la probabilité $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ qu'elle ne se prolongera pas au-delà de 4 coups; on trouverait $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ pour le 6$^e$ coup, et ainsi de suite; car il est d'ailleurs évident que la partie ne peut se terminer qu'à un nombre pair de coups.

Si les joueurs voulaient se séparer avant la décision du sort, comme l'époque de cette décision est indéterminée, il faudrait qu'ils convinssent préalablement du nombre de coups sur lequel ils se proposent de régler leur partage. Je supposerai, pour compléter l'exemple que je donne ici, qu'au 1$^{er}$ coup le joueur $A$ ayant un point,

propose la cessation du jeu ; le tableau précédent montre que le 1er coup ayant amené l'événement $A$, il ne reste au second coup que les événemens $AA$ et $AB$, dont la probabilité est $\frac{1}{2}$. Le premier fait gagner le joueur $A$ ; le second, réduisant les deux joueurs à l'égalité, donne à chacun la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner, la même qu'il avait en se mettant au jeu. Suivant ces remarques, les probabilités sont, pour le 1er joueur, $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ ; pour le 2e, $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. Si donc ils prennent le second coup pour régler leur séparation, le joueur $A$ aura les $\frac{3}{4}$ de la somme déposée, et le joueur $B$ seulement $\frac{1}{4}$ ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque le point $A$ arrivé au premier coup, excluant les arrangemens $BA$ et $BB$ du 2e coup, ne laisse à ce joueur que la part assignée par l'événement $AB$.

Si le gain de la partie dépendait d'obtenir une supériorité de 3 points, le tableau des événemens possibles à chaque coup deviendrait beaucoup plus compliqué ; il en présenterait 8 au 3e coup, sur lesquels 2 termineraient le jeu, 12 au 4e, 24 au 5e, sur lesquels 6 termineraient le jeu, etc. ; les probabilités des événemens étant $\frac{1}{2}$ au 1er coup, $\frac{1}{4}$ au 2e, $\frac{1}{8}$ au 3e, $\frac{1}{16}$ au 4e, $\frac{1}{32}$ au 5e, etc., on trouverait que la probabilité de finir la partie

$$\text{au } 3^e \text{ coup serait } \frac{1}{4}\,;\ \text{au } 5^e,\ \frac{3}{16}\,;\ \text{au } 7^e,\ \frac{9}{64},\ \text{etc.};$$

et par conséquent la probabilité qu'elle n'irait pas au-delà du

$$5^e \text{ coup, serait } \frac{1}{4}+\frac{3}{16}\,;\ \text{du } 7^e,\ \frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{9}{64},\ \text{etc.}$$

Quand la supériorité de points qui fait gagner surpasse 3, l'on ne tombe plus sur une progression par quotiens ; mais la solution complète de ce problème,

l'un des plus difficiles qu'on se soit proposés sur ce sujet, ne saurait trouver place dans ce Traité. (*Voyez* la note II.)

60. La considération des sommes *éventuelles*, c'est-à-dire dépendantes du hasard, a introduit dans le calcul des probabilités une expression qui mérite un examen particulier, celle d'*espérance mathématique*, par laquelle on désigne *le produit d'une somme éventuelle par la probabilité de l'obtenir*. C'est dans la règle des partis qu'on en saisit le mieux la raison. Lorsque des joueurs consentent à partager le fonds du jeu avant que le sort en ait disposé, ils n'ont encore que des espérances; et cette règle accordant à chacun d'eux, sur la somme déposée, une partie indiquée par la probabilité qu'il a de gagner le tout, il était assez naturel de prendre cette partie pour la valeur de son attente. On pourrait aussi la considérer comme ce que devrait lui payer quelqu'un qui voudrait prendre sa place si le jeu continuait. On va retrouver ces divers points de vue dans la règle des paris.

61. Premièrement, l'équation $af=be$ (56) exprime l'égalité des produits formés en multipliant le gain qu'espère chaque joueur, par la probabilité de l'obtenir : on peut donc dire que *dans un pari équitable, les espérances mathématiques des deux parieurs doivent être égales*.

Secondement, si on regarde les mises de ces joueurs comme ne leur appartenant plus, dès qu'elles sont déposées, et qu'on évalue l'espérance sur la rentrée de la somme de ces mises, que produit le gain du pari, on aura

$(a+b)e$ pour le 1$^{er}$ joueur, $(a+b)f$ pour le 2$^{e}$;

et à cause que $be=af$ et $e+f=1$, ces valeurs sont respectivement égales aux mises $a$ et $b$. On voit donc

que *la mise de chaque joueur doit être égale à son espérance mathématique sur la somme déposée pour former le fonds du jeu;* elle peut être considérée comme le prix qu'il donne pour acquérir cette espérance.

Troisièmement, si on met l'équation $af = be$ sous la forme

$$be - af = 0,$$

et qu'on regarde les pertes comme des sommes négatives, le produit $-af$ de la somme $-a$, par la probabilité $f$ de la perdre, pourra entrer dans l'évaluation de *l'espérance mathématique* du premier joueur, laquelle *se formera alors en multipliant le profit ou la perte que lui apportent chacun des événemens possibles, par la probabilité de ces événemens, et donnant aux pertes le signe* $-$. Elle sera égale à zéro, dans le cas du pari équitable; ce qui veut dire que l'état du joueur doit être envisagé comme n'étant pas changé par son entrée au jeu.

Ce dernier point de vue semble présenter une contradiction dans les termes; car l'état indiqué par l'espérance mathématique du joueur est fictif, il n'est point celui qui a lieu dans la réalité. Après la décision du sort, l'argent du joueur sera augmenté de $b$ ou diminué de $a$, selon qu'il aura gagné ou perdu. Dans l'un et l'autre cas, son état sera différent de ce qu'il était avant le jeu. Comment donc interpréter cette conclusion, dans laquelle semblent se compenser l'un par l'autre deux événemens qui s'excluent mutuellement? Par les conséquences des épreuves répétées, dont la multiplication tend sans cesse à opérer la compensation des pertes et des gains, en rapprochant la distribution des événemens simples du rapport de leurs probabilités.

62. Cette explication, donnée par Condorcet, qui a le premier remarqué la difficulté, s'appuie sur des propositions démontrées par le calcul. D'abord, dans un nombre quelconque d'épreuves, le plus probable des événemens composés est précisément celui où le gain égale la perte. En effet, si les événemens *A* et *B*, dont l'un fait gagner *b* et l'autre perdre *a*, ont respectivement les probabilités

$$e=\frac{m}{m+n},\quad f=\frac{n}{m+n},$$

on aura

$$be-af=\frac{bm-an}{m+n};$$

et dans un nombre $r(m+n)$ d'épreuves, l'événement le plus probable étant composé de $rm$ événemens *A* et de $rn$ événemens *B* (27), donnera au joueur qui parie pour *A*, la somme

$$bmr-anr,$$

qui s'évanouit quand on a l'équation

$$bm-an=0,\quad \text{ou la proportion}\quad a:b::m:n,$$

c'est-à-dire lorsque les mises sont en raison des probabilités (56).

63. A la vérité, ce résultat précis ne repose que sur une probabilité relative ; mais on peut obtenir une probabilité absolue, de plus en plus grande, d'en approcher aussi près qu'on le voudra, savoir, la probabilité que le rapport du nombre des événemens *A* au nombre des épreuves sera compris entre les limites

$$\frac{m+1}{m+n}\quad\text{et}\quad\frac{m-1}{m+n},$$

lorsqu'on embrassera $r(m+n)$ épreuves (32).

Ecrivons dans ces formules $sm$ et $sn$ à la place de $m$ et de $n$, suivant l'observation du n° 33; les limites ci-dessus devenant

$$\frac{sm+1}{s(m+n)}, \quad \frac{sm-1}{s(m+n)},$$

se rapporteront à des événemens composés dans lesquels il en entrera au plus $rsm+r$ de l'espèce $A$ avec $rsn-r$ de l'espèce $B$, et au moins $rsm-r$ de l'espèce $A$ avec $rsn+r$ de l'espèce $B$. Dans le premier cas, le joueur qui parie pour $A$ recevra... $(rsm+r)b$, et donnera $(rsn-r)a$; la valeur de cet événement composé sera donc

$$(rsm+r)b-(rsn-r)a=rs\left(mb-na+\frac{a+b}{s}\right).$$

Si elle est positive, ce qui arrivera quand

$$mb+\frac{a+b}{s}>na,$$

elle exprimera le gain du joueur qui parie pour $A$, et la perte de celui qui parie pour $B$.

Dans le second cas, au lieu de la valeur ci-dessus, on aura

$$(rsm-r)b-(rsn+r)a=rs\left(mb-na-\frac{a+b}{s}\right),$$

valeur qui sera négative si

$$na+\frac{a+b}{s}>mb,$$

et qui alors exprimera une perte pour le premier joueur, un gain pour le second.

Quand $bm-an=0$, tout devient égal entr'eux;

ils ont la même probabilité de ne pas gagner et de ne pas perdre au-delà de la somme

$$rs\left(\frac{a+b}{s}\right) = r(a+b).$$

C'est une partie déterminée de la mise totale de chaque joueur; car si on y remplace $b$ par sa valeur $\frac{an}{m}$, tirée de l'équation

$$bm - an = 0,$$

elle deviendra $\frac{ra(m+n)}{m}$, et la mise totale du joueur qui parie pour $A$ étant $rsa(m+n) = M$, on aura

$$r(a+b) = \frac{M}{sm}:$$

la somme gagnée ou perdue a donc avec la mise totale, le rapport $\frac{1}{sm}$ qui diminue à mesure que $s$ augmente.

On trouverait de même, en chassant $a$ au lieu de $b$, que

$$r(a+b) = \frac{M}{sn},$$

ce qui donne, pour le second joueur, le rapport $\frac{1}{sn}$.

64. Supposons maintenant que l'équation....... $bm - an = 0$ n'ait pas lieu, mais que l'espérance du second joueur l'emporte sur celle du premier: posons, en conséquence, $an = bm + c$; il en résultera, dans le premier cas,

$$rs\left(-c + \frac{a+b}{s}\right) \left\{ \begin{array}{l} \text{gain du 1}^{\text{er}} \text{ joueur,} \\ \text{perte du 2}^{\text{e}}, \end{array} \right.$$

et dans le second cas,

$$-rs\left(c + \frac{a+b}{s}\right) \begin{cases} \text{perte du 1}^{\text{er}} \text{ joueur,} \\ \text{gain du 2}^{\text{e}}. \end{cases}$$

On voit par ces expressions, que le gain du 1er joueur se change en perte, et la perte du 2e en gain, dès que $c > \frac{a+b}{s}$; le 1er joueur perdra donc dans toute l'étendue des limites assignées aux événemens composés, tandis que le 2e gagnera toujours entre ces mêmes limites. Or le nombre $s$ pouvant être pris aussi grand qu'on voudra, il s'ensuit que *quelque petite que soit la différence qu'on établisse entre les espérances mathématiques de deux joueurs, on pourra, en multipliant le nombre des épreuves, obtenir telle probabilité qu'on voudra, que le joueur favorisé sera toujours en gain, et l'autre toujours en perte.*

Cette dernière proposition me paraît bien suffisante pour justifier la règle du pari équitable et fixer le sens que l'on doit attacher à l'espérance mathématique; elle prouve la nécessité de faire entrer la répétition des hasards dans l'appréciation des pertes et des gains qu'ils amènent, et justifie complètement l'assertion qui termine le n° 37 (*).

(*) Condorcet ajoute encore les considérations suivantes qui ne sont pas moins curieuses.

Dans le développement de $(m+n)^{r(m+n)}$ la somme des termes qui précèdent le plus grand, celui qui est affecté de $m^{rm}n^{rn}$, comparée à la valeur totale du développement, tend sans cesse vers le rapport $\frac{1}{2}$; il en est de même de la somme des termes qui suivent ce plus grand. Les premiers répondent aux événemens qui font gagner le joueur pariant pour $A$, les autres aux événemens qui font gagner son adversaire, lorsque leurs espérances mathématiques sont égales, et seulement dans ce cas. Il résulte évidemment de là que l'état des joueurs est parfaitement le même, puisqu'à mesure que les épreuves

65. Je n'ai encore considéré que deux événemens possibles à chaque épreuve ; mais on applique l'*espérance mathématique* à l'évaluation de tous les genres de hasard. *Soit*, par exemple, *un dé à 6 faces, marquées depuis 1 jusqu'à 6, pour l'apparition de chacune desquelles un joueur s'engage à donner à celui qui jette le dé, autant de francs qu'elle contient de points; on demande la somme que ce dernier doit mettre au jeu?* L'espérance mathématique de celui-ci se forme en ajoutant celles que donnent tous les événemens possibles, et qui sont égales au produit du nombre de points marqués sur les diverses faces, par la probabilité $\frac{1}{6}$ d'en amener une quelconque : le résultat est

$$\frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3^{fr.}\frac{1}{2}.$$

Aucun événement ne rapportera précisément cette somme; mais elle est la *moyenne* (ou elle tient le milieu) entre les gains et les pertes, c'est-à-dire que les unes sont autant au-dessus que les autres sont au-dessous. En effet, le second joueur éprouvera, sur les points

$$1,\ 2,\ 3, \text{ les pertes } 2^{fr.}\frac{1}{2},\ 1^{fr.}\frac{1}{2},\ \frac{1^{fr.}}{2};$$

et sur les points

$$4,\ 5,\ 6, \text{ les gains } \frac{1^{fr.}}{2},\ 1^{fr.}\frac{1}{2},\ 2^{fr.}\frac{1}{2}:$$

les unes compensent les autres. Pour le premier joueur, ce serait la même chose, mais dans l'ordre inverse.

---

se répètent, les probabilités de gain tendent à devenir égales pour tous deux (*Essai sur la probabilité des décisions*, etc., p. 145.). Les bornes dans lesquelles je me suis proposé de resserrer cet ouvrage, ne me permettent pas de rapporter la démonstration de la proposition ci-dessus.

Cette compensation peut ne jamais s'effectuer dans l'exactitude rigoureuse; mais les épreuves multipliées tendent sans cesse à la produire, comme aussi à opérer l'accumulation des plus petits avantages : c'est ce que l'expérience prouve chaque jour. Les personnes qui jouent constamment entr'elles des jeux de société, où les conditions du pari sont égales, et qui parviennent à peu près au même degré d'habileté, voient à la longue leurs pertes et leurs gains se rapprocher beaucoup; au contraire, les *banquiers* qui se chargent de tenir un jeu de pur hasard, moyennant certains avantages sur les chances, se procurent un bénéfice assuré, dès qu'ils ont des fonds suffisans pour faire face à quelques événemens trop défavorables qui peuvent arriver de tems à autres.

66. Le succès des loteries est de ce genre; il est fondé sur ce qu'elles ne rendent pas à ceux qui y mettent (ou aux *pontes*), le gain correspondant aux risques qu'ils courent; la disproportion est le plus souvent considérable, et augmente à mesure que les probabilités de succès diminuent, ainsi qu'on va le voir dans la loterie de France.

L'*extrait simple*, ou la sortie d'un seul numéro, ne rend que 15 fois la mise, quoique sa probabilité n'étant que $\frac{1}{18}$ (44), il devrait produire un gain égal à 17 fois la mise, et rendre par conséquent 18 fois cette mise. L'espérance mathématique du banquier excède donc ici de $\frac{3}{18}=\frac{1}{6}$ celle des pontes.

L'*extrait déterminé*, ou la sortie d'un seul numéro, à une place marquée du tirage, le premier, par exemple, ne rend que 70 fois la mise, pour une probabilité égale

à $\frac{1}{90}$; l'avantage du banquier, sur ce hasard, est donc $\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$.

*L'ambe*, ou la sortie, dans le même tirage, de deux numéros désignés, ne rend que 270 fois la mise; mais 90 numéros, combinés 2 à 2, produisant $\frac{90.89}{2}=4005$ ambes, et les 5 numéros d'un tirage $\frac{5.4}{2}=10$, la probabilité de la sortie d'un ambe est $\frac{10}{4005}$; la probabilité contraire, $\frac{3995}{4005}$; le gain du ponte devrait donc être $\frac{3995}{10}=399{,}5$ fois la mise; l'avantage du banquier est par conséquent

$$(399{,}5-269)\frac{10}{4005}=\frac{1305}{4005}=\frac{29}{89}.$$

*L'ambe déterminé*, ou la sortie de deux numéros désignés, dans une place donnée du tirage, ne rend que 5100 fois la mise. Comme il s'agit ici des arrangemens deux à deux, et non pas des combinaisons, les 90 numéros produisent 8010 ambes déterminés; de plus, la place étant fixée dans le tirage, la probabilité d'un ambe déterminé sera par conséquent $\frac{1}{8010}$; la probabilité contraire, $\frac{8009}{8010}$; le gain du ponte devrait donc être 8009 fois la mise; l'avantage du banquier est par conséquent

$$(8009-5099)\frac{1}{8010}=\frac{291}{801}.$$

*Le terne*, ou la sortie, dans le même tirage, de

trois numéros désignés, ne rend que 5500 fois la mise ; mais 90 numéros, combinés 3 à 3, produisant $\frac{90.89.88}{1.2.3} = 117480$ ternes, et les 5 numéros du tirage, $\frac{5.4.3}{1.2.3} = 10$, la probabilité de la sortie d'un terne est $\frac{10}{117480} = \frac{1}{11748}$; la probabilité contraire, $\frac{11747}{11748}$; le gain du ponte devrait donc être 11747 fois la mise ; l'avantage du banquier est par conséquent

$$(11747 - 5499)\,\frac{1}{11748} = \frac{6248}{11748} = \frac{142}{267}.$$

Le *quaterne*, ou la sortie, dans le même tirage, de quatre numéros désignés, ne rend que 75000 fois la mise ; mais les 90 numéros, combinés 4 à 4, produisant $\frac{90.89.88.87}{1.2.3.4} = 2555190$ quaternes, et les 5 numéros du tirage, $\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = 5$, la probabilité de la sortie d'un quaterne est $\frac{5}{2555190} = \frac{1}{511038}$; la probabilité contraire, $\frac{511037}{511038}$; le gain du ponte devrait donc être 511037 fois la mise ; l'avantage du banquier est par conséquent

$$(511037 - 74999)\,\frac{1}{511038} = \frac{436038}{511038} = \frac{218019}{255519}.$$

On pouvait mettre autrefois sur le *quine*, ou sur la sortie, dans le même tirage, de cinq numéros désignés, qui ne rendait que 1 000 000 de fois la mise ; mais les 90 numéros, combinés 5 à 5, produisant $\frac{90.89.88.87.86}{1.2.3.4.5} = 43\,949\,268$ quines, et les 5 nu-

méros du tirage, 1, la probabilité de la sortie d'un quine était donc $\frac{1}{43949268}$; la probabilité contraire, $\frac{43949267}{43949268}$; le gain du ponte aurait donc dû être 43 949 267 fois la mise; l'avantage du banquier était par conséquent

$$(43\,949\,267 - 999999)\frac{1}{43949268} = \frac{42949268}{43949268},$$

et surpassait $\frac{42}{43}$.

On a supprimé cette manière de jouer, dans laquelle la difficulté de gagner était si grande, qu'elle devait rebuter presque tout le monde. Pour s'en faire bientôt une idée, il suffit de considérer qu'en faisant 2 tirages par mois dans 4 villes différentes, ce qui donnerait 96 tirages dans un an, il faudrait plus de 457804 ans pour que tous les quines fussent sortis, en supposant encore qu'aucun ne se fût répété pendant cet immense intervalle. La sortie de tous les quaternes exigerait, dans la même hypothèse, plus de 5323 ans : on trouverait bien autre chose encore, si, par la formule du n° 54, on cherchait le nombre de tirages qu'il faudrait embrasser pour obtenir la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner un quine ou un quaterne.

67. Il ne faut pas croire pourtant que le gain du banquier, à la loterie, soit aussi démesuré que le montrent les calculs précédens. Pour que la grande disproportion établie entre la mise et le gain produisît infailliblement son plein effet, il faudrait que toutes les combinaisons des numéros fussent jouées avec des mises égales, mais c'est ce qui est bien loin d'arriver. Les mises par extrait, qui sont les plus nombreuses, se distribuent

très-inégalement entre les 90 numéros, selon la date de leur dernière sortie, ou d'après des rêveries superstitieuses; aussi l'administration de la loterie, qui craignait la sortie d'un numéro trop *chargé* de mises, s'était réservé le droit de le *fermer*, c'est-à-dire de ne pas recevoir les mises qui seraient faites sur ce numéro; mais une longue expérience l'ayant bien rassurée sur cette crainte, elle ne met plus à présent de restriction à la volonté des pontes: seulement, comme autrefois, elle fait vendre des billets arrangés d'avance, afin de répandre autant qu'il est possible les mises sur toutes les combinaisons. Cependant il n'est pas nécessaire que le partage des mises approche beaucoup de l'égalité, pour mettre le banquier hors de perte : c'est ce dont on peut se convaincre, en considérant ses avantages sous le rapport des recettes aux dépenses dans chaque tirage.

Si toutes les mises par extrait étaient les mêmes, un tirage lui coûterait $5 \times 15$ mises, ou 75 mises; s'il en avait reçu 90, il aurait un bénéfice assuré de 15 mises, et il serait au pair, s'il y avait eu seulement 75 numéros placés. Faisant le même calcul sur les autres manières de jouer les numéros, on verra l'excédant de la recette sur la dépense augmenter d'une manière si rapide, que le pair est atteint bien avant que toutes les combinaisons ou les arrangemens soient remplis.

Au reste, les profits bien constatés de la loterie, pendant une longue suite d'années, les pertes et les désordres, malheureusement aussi bien constatés, dont elle a été la cause, pour une multitude de gens de toute profession, enivrés par ses espérances trompeuses, parlent encore plus haut que les calculs précédens, contre la faiblesse qui fait hasarder dans un jeu aussi inégal un argent dont on pourrait faire un usage

*

profitable autant à l'amélioration des mœurs qu'aux avantages physiques des hommes, s'il y avait des caisses d'épargnes solidement établies, sagement administrées, où recueillant les petites économies de l'ouvrier laborieux et du domestique fidèle, on leur préparât des ressources assurées pour le tems de la vieillesse et des infirmités.

Ceux qui veulent absolument se bercer d'espérances frivoles, ont retourné de toutes les manières les combinaisons que présentent la constitution de la loterie et les tableaux des numéros sortis depuis son établissement, afin d'y chercher un moyen de trouver son côté faible. Ce qu'ils ont pu faire de moins déraisonnable revient à déterminer des progressions de mises croissant de manière qu'un événement heureux dont la probabilité serait assez considérable, pût couvrir la perte passée; mais par ce moyen on ne saurait arriver à une probabilité un peu grande d'obtenir un gain même très-faible, qu'en exposant une somme assez forte pour que sa perte entraînât de bien plus graves inconvéniens que le gain ne pourrait donner d'avantages. Les pontes qui ont peu de fortune ne sauraient suivre de semblables jeux, ce qu'on appelle faire la *martingale*, sans se gêner ou s'obérer, et sont souvent forcés de les abandonner, en perdant tout ce qu'ils y ont exposé. Quant aux gens riches, ils peuvent faire de leurs capitaux un emploi bien plus avantageux, en se livrant aux améliorations de l'agriculture, au perfectionnement des arts, au développement du commerce. Dans cette espèce de jeu, dont on peut dire que la nature est le banquier, parce que sa force reproductive en fait le fonds, les pontes sages et éclairés augmentent leur fortune en procurant à la société un accroissement de bien-être.

*De l'Espérance morale.*

68. Ce n'est pas seulement à un jeu inégal qu'un homme sensé ne voudra point exposer une somme un peu forte, dans l'espérance d'un petit gain très-probable; il penserait encore ainsi, quand même les conditions du jeu seraient égales; mais il se déterminerait au contraire aisément à risquer une faible somme, pour obtenir un gain considérable, et d'une probabilité fort petite. L'un et l'autre de ces cas peuvent néanmoins répondre à la même espérance mathématique, puisque l'équation $be = af$ subsistera toujours, si, dans chacun de ses membres l'un des facteurs diminue dans le même rapport que l'autre augmente. L'appréciation morale de l'événement diffère donc ici de son évaluation mathématique. La cause en est dans la disproportion entre les conséquences d'une perte qui diminuerait considérablement la fortune du joueur, et celles d'un gain qui n'y apporterait qu'une très-légère augmentation. Il est incontestable que la valeur absolue d'une somme d'argent n'est pas toujours la mesure précise de son importance : elle doit le plus souvent s'estimer d'après les privations que sa perte impose, où les jouissances que son gain procure; ce qui dépend de l'état de la fortune de celui qui doit la perdre ou la gagner; mais comment introduire cette considération dans les calculs? Quelle proportion convient-il d'établir entre le bien possédé et les sommes éventuelles? Quelle formule, satisfaisant à toutes les conditions du sujet, doit être substituée à celle de l'espérance mathématique? Enfin convient-il d'abandonner cette appréciation des événemens incertains? C'est ce que je vais examiner successivement.

69. Pour donner des bases à l'estimation relative

des pertes et des gains, il paraîtrait d'abord indispensable de classer les objets de dépenses suivant leur degré d'utilité; mais il serait bien difficile de former de cette manière un tarif avoué par tout le monde. Les aises, le superflu même, auxquels on s'est habitué, sont souvent regardés comme faisant partie du nécessaire, et chacun en établit les rapports selon ses dispositions et ses goûts. On ne voit donc dans l'idée de *perte* et de *gain relatifs*, que le *plus* ou le *moins*, sentis d'une manière vague qui laisse absolument indéterminée la loi d'accroissemênt et de diminution de leurs rapports d'importance; ensorte qu'il n'y a d'autre moyen d'y appliquer le calcul, que d'établir une hypothèse, pour en faire l'épreuve par la comparaison de ses conséquences avec ce qu'indique le simple bon sens, procédé qui ne saurait mener à des résultats précis, mais conduit seulement à distinguer le plausible de l'absurde.

Ce qui se présente de mieux, au premier coup d'œil, est de prendre pour mesure de l'importance d'une somme ajoutée à un bien quelconque, le rapport de l'une à l'autre, et d'admettre en conséquence que l'homme qui possède 1000^fr., et qui gagne 100^fr., en reçoit un avantage égal à celui que procure un gain de 10000^fr. au possesseur de 100000^fr., ou le gain de 1^fr. à l'homme n'ayant que 10^fr.

Dès que l'on fait entrer dans l'appréciation des sommes éventuelles, la considération du bien antérieurement possédé, la même somme acquiert plus d'importance lorsqu'on la perd que lorsqu'on la gagne. En effet, le joueur qui, possédant 1000^fr., va risquer une somme de 100^fr., s'expose à perdre la 10^e partie de son bien; l'importance de cette somme pour lui est représentée alors par $\frac{1}{10}$; mais s'il la gagne, comme

il aura 1100$^{fr.}$, la même somme de 100$^{fr.}$ ne sera plus que $\frac{1}{11}$ de sa fortune ; elle aura par conséquent diminué de valeur morale. Buffon, qui a proposé cette hypothèse, en conclut que le jeu le plus simple et le plus égal, celui dans lequel deux personnes qui possèdent autant de bien l'une que l'autre, ont en leur faveur un nombre égal de chances, entraîne toujours une perte absolue d'aisance, puisque l'événement diminue plus le bien-être du perdant qu'il n'augmente celui du gagnant. Dans l'exemple ci-dessus, l'estimation de cette perte serait $\frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$; dans celui de Buffon, la somme éventuelle étant la moitié de la fortune des joueurs, les valeurs morales de la perte et du gain sont exprimées par $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$, dont la différence est $\frac{1}{6}$ (*).

En général, soit $a$ le bien antérieur, et $\alpha$ la somme éventuelle; l'importance de cette somme sera exprimée par

$$\frac{\alpha}{a}, \text{ comme perte, } \quad \frac{\alpha}{a+\alpha}, \text{ comme gain,}$$

et la différence par $\frac{\alpha^2}{a(a+\alpha)}$.

Ceci conduit naturellement à chercher la valeur de la perte d'une importance équivalente au gain $\alpha$. Soit $x$ cette perte; on aura

$$\frac{x}{a} = \frac{\alpha}{a+\alpha}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{a\alpha}{a+\alpha} = \frac{\alpha}{1+\frac{\alpha}{a}}.$$

On voit par la dernière expression de $x$, que sa valeur approchera d'autant plus de $\alpha$, que la fraction $\frac{\alpha}{a}$ sera plus petite; ensorte que le gain et la perte

(*) *Essais d'Arithmétique morale*, p. 69 du t. IV du *Supplément de l'Histoire naturelle*, édition in-4°.

ne peuvent être d'égale importance que lorsqu'ils sont infiniment petits par rapport au bien antérieur.

70. C'est dans cet état que Daniel Bernoulli les considère d'abord, et suppose que leur valeur morale ou leur importance, qu'il désigne par le mot latin *emolumentum*, est en raison inverse du bien antérieur (*). Il conçoit ensuite qu'un bien quelconque est produit par l'accumulation d'un nombre infini de petits accroissemens dont chacun y ajoute un degré d'importance proportionnel à son rapport avec le capital déjà formé. La somme de tous ces degrés compose l'importance ou la valeur morale de la somme produite ainsi. En désignant par $\alpha$ les petits accroissemens du capital, par $a$, $a'$, $a''$, $a'''$...$x$ ses valeurs successives, et par $k$ un nombre constant, l'importance du capital $x$ sera exprimée par la suite

$$\frac{k\alpha}{a}+\frac{k\alpha}{a'}+\frac{k\alpha}{a''}+\frac{k\alpha}{a'''}\cdots\cdots+\frac{k\alpha}{x-\alpha},$$

dont la somme, lorsqu'on suppose $\alpha$ infiniment petit, s'obtient avec la plus grande facilité par le calcul intégral (*Voyez* la note III.). Avec ce secours, on trouve $k\,\mathrm{l}\frac{x}{a}$ pour la mesure de l'importance cherchée.

Pour s'assurer que cette mesure remplit la condition demandée, il suffit de connaître le développement du logarithme en série (*Voyez* le *Complém. des Elém. d'Algèbre.*); car si on suppose que $x$ se change en $x+\alpha$, l'expression $\mathrm{l}\frac{x}{a}$ devenant $\mathrm{l}\left(\frac{x+\alpha}{a}\right)$ s'accroîtra

(*) *Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, t. V, p. 175.

de la quantité

$$kl\left(\frac{x+\alpha}{a}\right)-kl\frac{x}{a}=kl\left(\frac{x+\alpha}{x}\right)=kl\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)=$$
$$k\left\{\frac{\alpha}{x}-\frac{\alpha^2}{2x^2}+\frac{\alpha^3}{3x^3}-\text{etc.}\right\},$$

tandis que la suite posée plus haut s'augmentera du terme $\frac{k\alpha}{x}$; et ces accroissemens approcheront d'autant plus de l'égalité, que $\alpha$ sera plus petit.

Le diviseur $a$ désigne ici un bien primitif au dessous duquel ne saurait tomber la valeur de $x$, qu'on ne peut pas supposer négative; car, comme le remarque Bernoulli, il n'y a que l'individu mourant actuellement de faim, duquel on puisse dire qu'il ne possède rien absolument. « Celui qui se procure en mendiant » une somme annuelle de 10 pièces d'or, n'en accep- » terait pas 50 sous la condition de renoncer à ce » moyen de gagner sa vie, aussi bien qu'à tout autre. Il » en est ainsi de ceux qui ne vivent qu'en empruntant. » Pourraient-ils s'interdire à jamais cette ressource, » moyennant une somme plus considérable même que » celle qui les libérerait de leurs dettes? Si donc le » mendiant et l'emprunteur ne veulent pas renoncer » à cette sorte de profession, le premier, à moins d'un » capital de 100 pièces d'or, et le second, à moins » d'un capital de 1000, nous regarderons l'un comme » riche de 100 pièces, et l'autre de 1000, quoique, » dans le langage ordinaire, on dise que l'un n'a rien, » et l'autre moins que rien. » En général, le bien possédé par un individu est au moins représenté par la subsistance qu'il tire de l'emploi de sa force et de son industrie, et ne s'anéantit qu'avec sa vie.

71. Si nous représentons par $y$ l'importance du ca-

pital $x$, et par $y'$ celle du capital $x'$, nous aurons

$$y'-y = k\,\mathrm{l}\,\frac{x'}{a} - k\,\mathrm{l}\,\frac{x}{a} = k\,\mathrm{l}\,\frac{x'}{x}.$$

Supposons maintenant, comme dans le n° 69, que $a$ soit un bien et $\alpha$ une somme éventuelle quelconques; en posant $x=a$, $x'=a+\alpha$ et $x'=a-\alpha$, l'importance de la somme $\alpha$ sera exprimée par

$$k\,\mathrm{l}\,\frac{a+\alpha}{a},\ \text{comme gain},\quad k\,\mathrm{l}\,\frac{a-\alpha}{a},\ \text{comme perte},$$

et négative dans le dernier état.

Pour déterminer la perte $x$ dont l'importance serait égale à celle du gain $\alpha$, nous poserons

$$-k\,\mathrm{l}\,\frac{a-x}{a} = k\,\mathrm{l}\,\frac{a+\alpha}{a},\quad \text{d'où}\quad \frac{a}{a-x} = \frac{a+\alpha}{a},$$

$$\text{et}\quad x = \frac{a\alpha}{a+\alpha}.$$

Cette valeur est la même que celle qui résulte de l'hypothèse de Buffon, quoique d'ailleurs cette hypothèse fasse croître bien plus rapidement que celle de Bernoulli l'importance des pertes. Ainsi deux hypothèses, fort éloignées l'une de l'autre, satisfont donc aux seules conditions que le sujet impose au premier coup d'œil, savoir, celle de diminuer le prix des sommes éventuelles, à mesure que le bien antérieur est plus considérable, et de donner plus d'importance à la perte qu'au gain. On pourrait trouver une infinité d'autres hypothèses qui en feraient autant; mais celle de Bernoulli paraît la plus plausible, parce qu'elle descend aux élémens mêmes dont se forment les capitaux, et que c'est en effet par les très-petites sommes qu'on peut perdre ou gagner avec indifférence, que le sentiment

commun fait apprécier les divers états de fortune. « Il s'embarrasse, dit-on, de perdre un écu, comme » moi de perdre un sou. » C'est comme si on disait : « Un écu est à sa fortune ce qu'un sou est à la mienne. »

72. Aux valeurs absolues des sommes attachées à des événemens incertains, Daniel Bernoulli substitue les valeurs morales, ou l'importance des capitaux résultant des modifications que ces événemens apportent à la fortune du joueur. Si, par exemple, des événemens dont les probabilités sont $e, f, g$, doivent produire des sommes $\alpha, \beta, \gamma$, et que $a$ désigne le bien antérieur, au lieu de l'espérance mathématique

$$e\alpha + f\beta + g\gamma \ (61),$$

on prendra

$$Y = k\left\{e\,l\,\frac{a+\alpha}{a} + f\,l\,\frac{a+\beta}{a} + g\,l\,\frac{a+\gamma}{a}\right\}$$

pour la valeur morale de la fortune du joueur qui attend ces événemens. C'est là ce que Bernoulli nomme la *mesure du sort* (*mensura sortis*); et ce que M. Laplace appelle *fortune morale* (*), par opposition à la *fortune physique*, c'est-à-dire à la valeur absolue du capital ayant une importance équivalente. En désignant ce capital par $X$, on aura

$$Y = k\,l\,\frac{X}{a}, \quad \text{d'où} \quad X = (a+\alpha)^e\,(a+\beta)^f\,(a+\gamma)^g,$$

à cause que $e + f + g = 1$ (12).

Si l'on cherchait l'équivalent du gain ou ce que M. Laplace appelle *espérance morale*, il faudrait faire $X = a + x$, ce qui donnerait

$$x = (a+\alpha)^e\,(a+\beta)^f\,(a+\gamma)^g - a.$$

(*) *Théorie analytique des Probabilités* p. 433.

En développant les puissances et les multiplications indiquées dans le second membre, et se bornant aux termes où les sommes éventuelles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ne s'élèvent qu'à la première puissance, on trouvera

$$x = a^{e+f+g} + a^{e+f+g-1}\{e\alpha + f\beta + g\gamma\} - a,$$

ce qui se réduit à

$$x = e\alpha + f\beta + g\gamma,$$

puisque $e+f+g=1$, $e+f+g-1=0$.

Ce résultat, le même que l'*espérance mathématique*, montre que l'*espérance morale* a sensiblement la même valeur, lorsque les sommes éventuelles sont très-petites par rapport au bien antérieur, conséquence qu'il ne faut pas perdre de vue, et qui suit également de toutes les hypothèses qu'on pourrait faire sur l'importance des sommes éventuelles.

Voici les principales applications que Daniel Bernoulli fait de sa formule.

73. Premièrement, il cherche le sort d'un joueur possédant 100 pièces, et ayant la probabilité $\frac{1}{2}$ d'en gagner ou d'en perdre 50. Dans ce cas,

$$e = \frac{1}{2},\ f = \frac{1}{2},\ g = 0,\ a = 100,\ \alpha = 50,\ \beta = -50,$$

il vient

$$X = (100+50)^{\frac{1}{2}}(50)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{50.150} = 87:$$

ce joueur aurait donc 13 de perte sur son état primitif; elle se réduirait à 6, si l'on faisait $a = 200$.

74. Dans la seconde question, Bernoulli suppose qu'*on demande à un négociant une somme de* 800 *pièces pour lui garantir* (ou assurer) *le prix de marchandises dont la valeur s'élève à* 10000 *pièces, et qui, devant être transportées par mer, seront exposées à un risque*

*de perte dont la probabilité est* $\frac{1}{20}$ *: convient-il à ce négociant d'accepter le marché qu'on lui propose?* Pour en juger comparons les valeurs physiques de la fortune de ce négociant, lorsqu'il court les risques du transport, et lorsqu'il accepte la garantie (ou l'*assurance*) qui lui est offerte. Désignons toujours par $a$ le bien qu'il possède, outre les marchandises énoncées dans la question, et faisons

$$\alpha = 10000, \quad e = \frac{19}{20}, \quad f = \frac{1}{20};$$

l'expression générale de $X$ donnera, pour le premier cas,

$$(a + 10000)^{\frac{19}{20}} a^{\frac{1}{20}},$$

et $a + 9200$ pour le second, dans lequel il y a une perte certaine de 800 pièces. Donc, selon que

$$(a + 10000)^{\frac{19}{20}} a^{\frac{1}{20}} < \text{ou} > a + 9200,$$

la garantie proposée donnera un avantage ou un désavantage moral au négociant.

De là résulte une détermination de $a$ ou du bien qu'il doit posséder, pour pouvoir rejeter cette assurance, et ce sera la valeur de $a$ qui satisfera à l'équation

$$(a + 10000)^{\frac{19}{20}} a^{\frac{1}{20}} = a + 9200,$$

puisqu'elle est la limite qui sépare l'avantage du désavantage. Cette équation, traitée par rapport à la lettre $a$, suivant les procédés indiqués pour résoudre par approximation les équations numériques, donnera $a = 5043$. Tant que le négociant possède moins que cette somme, la formule de Bernoulli lui prescrit de faire assurer ses marchandises.

Il n'en est pas de cette formule comme de celle de l'espérance mathématique; les conditions n'y sont pas

les mêmes pour chacun des joueurs ; aussi pour compléter la solution du problème qui nous occupe, Bernoulli cherche-t-il le bien que doit posséder celui qui offre la garantie (ou l'*assureur*). En désignant ce bien par $b$, on trouvera que la valeur physique de la fortune de l'assureur est, par suite de sa spéculation,

$$(b+800)^{\frac{19}{20}}(b-9200)^{\frac{1}{20}};$$

et l'égalant à $b$, on aura l'équation

$$(b+800)^{\frac{19}{20}}(b-9200)^{\frac{1}{20}}=b,$$

qui doit déterminer la valeur de $b$, au-dessous de laquelle l'assureur aurait tort de se livrer à la spéculation qu'il a entreprise ; cette somme est 14243 pièces.

Il faudrait qu'il en possédât au moins 29878, pour pouvoir ne demander au négociant que 600 pièces au lieu de 800, les risques demeurant les mêmes ; et celui-ci aurait tort de rejeter l'offre, tant que son bien ne s'éleverait pas à 20478 pièces. Ces nombres se déterminent comme les précédens, en substituant seulement 600 à 800.

75. Quand on ne considère que la valeur de l'espérance mathématique, on trouve qu'il est indifférent de risquer une somme dans un seul hasard, ou de la partager entre plusieurs hasards ayant la même probabilité que celui-ci ; par exemple, de la placer sur un seul vaisseau, ou de la répartir entre plusieurs, lorsque le risque de perte est le même pour tous ces vaisseaux. En effet, $a$ désignant cette somme, $r$ le nombre des vaisseaux, dont sur $m+n$, il s'en perd $n$ ; toutes les chances de leur arrivée seront comprises dans la formule

$$(m+n)^r = m^r + \frac{r}{1}m^{r-1}n + \frac{r(r-1)}{1.2}m^{r-2}n^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}m^{r-3}n^3 + \text{etc.};$$

la mise $a$ étant partagée entre les $r$ vaisseaux, l'arrivée de tous ces vaisseaux vaudra une somme $\frac{ra}{r}$; celle de $r-1$, une somme $(r-1)\frac{a}{r}$, et ainsi de suite. Multipliant donc par ces sommes les termes qui leur correspondent, on verra sans peine que le produit revient à

$$ma\left(m^{r-1}+\frac{(r-1)}{1}m^{r-2}n+\frac{(r-1)(r-2)}{1.2}m^{r-3}n^2+\text{etc.}\right) = ma(m+n)^{r-1};$$

et divisant par $(m+n)^r$, il en résultera $\frac{ma}{m+n}$ pour l'espérance mathématique, de même que si l'on n'avait considéré qu'un seul vaisseau.

La formule de Bernoulli paraît plus d'accord avec l'opinion commune, qui porte à diviser les sommes aventurées. Pour le montrer, il détermine successivement le sort d'un marchand qui, possédant 4000 pièces, et attendant par mer pour 8000 pièces de marchandises, fait charger ces marchandises, soit sur 1, soit sur 2 vaisseaux dont la probabilité d'arrivée est $\frac{9}{10}$. Dans le premier cas, la valeur physique de la fortune de ce négociant est

$$(12000)^{\frac{9}{10}}(4000)^{\frac{1}{10}} = 10751.$$

Le second, offrant trois événemens composés dont les probabilités sont $(\frac{9}{10})^2$, $2\frac{9}{10}.\frac{1}{10}$, $(\frac{1}{10})^2$ (20), et qui donnent $\alpha = 8000$, $\beta = 4000$, $\gamma = 0$, conduit à

$$(12000)^{\frac{81}{100}}(8000)^{\frac{18}{100}}(4000)^{\frac{1}{100}} = 11033.$$

En retranchant de ces sommes les 4000 pièces, bien

antérieur que possède le négociant, on aura 6751 et 7033 pour les valeurs morales des sommes éventuelles qu'il attend. Par la formule de l'espérance mathématique, on trouvera $8000 \times \frac{9}{10} = 7200$, somme plus forte, mais dont les résultats, tirés de la formule de Bernoulli, s'approcheront d'autant plus que les marchandises seront réparties sur un plus grand nombre de vaisseaux.

76. Ce géomètre termine le mémoire dont je donne l'extrait, par la solution du problème qui fit naître les premiers doutes sur l'évaluation de l'espérance mathématique, adoptée sans discussion par les inventeurs du calcul des probabilités. Il fut proposé à Montmort, par Nicolas Bernoulli (*), et reçut le nom de *problème de Pétersbourg*, à cause sans doute de la mention qu'en a faite Daniel Bernoulli, dans les Mémoires académiques de cette ville. Voici l'énoncé qu'on y trouve : *Pierre se proposant de jeter en l'air une pièce de monnaie, promet de donner à Paul 1 ducat si, dès le 1er coup, cette pièce étant tombée, montre la face; 2, si cela n'arrive qu'au 2e coup; 4, si ce n'est qu'au 3e, et ainsi de suite, en doublant à chaque coup; on demande le sort de Paul.* Cette sorte de jeu se nomme en français *croix* ou *pile*, *pile* désignant la face qui doit paraître : il revient au jet d'un dé qui n'aurait que deux faces.

En appliquant le calcul aux conditions indiquées ci-dessus, on trouve pour Paul les probabilités

$$\frac{1}{2},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\ldots\ldots\ \frac{1}{2^n}$$

de gagner

$$1,\quad 2,\quad 4,\ldots\ldots\ 2^{n-1} \text{ ducats},$$

(*) *Analyse des jeux de hasard*, p. 402, 5e problème.

selon que pile n'arrivera qu'au

$$1^{er},\ 2^{e},\ 3^{e}, \ldots\ldots n^{e} \text{ coup};$$

son espérance mathématique de gain vaudra donc

$$\frac{1}{2}.1+\frac{1}{4}.2+\frac{1}{8}.4 \ldots\ldots +\frac{1}{2^n}.2^{n-1}=\frac{n}{2}.$$

Or, puisqu'il n'est pas impossible que pile n'arrive qu'après un nombre de coups, plus grand que tel nombre qu'il plaira d'assigner, ne s'ensuit-il pas qu'avant de commencer le jeu, il faut supposer ce nombre infini? La mise de Paul doit donc être infinie; mais quel homme sensé voudra risquer à ce jeu, non pas une somme infinie, ce qui est absurde, mais même une somme tant soit peu forte : voilà le paradoxe que les géomètres ont cherché à expliquer ou à éviter.

Quelques-uns ont pensé qu'on leverait toute difficulté, soit en fixant pour le maximum de gain une somme tellement grande qu'on dût regarder comme absolument inutile tout ce qu'on pourrait y ajouter, puisqu'on n'en saurait faire aucun emploi, ou bien en fixant une probabilité assez petite, pour qu'on pût la considérer comme nulle, et regarder comme impossible l'événement auquel elle répond. Par la première considération, on place le terme du jeu au coup dont le gain rapporterait la somme prise pour limite de celles qu'il est utile de posséder. Cramer proposait pour cette limite, le nombre marqué par

$$2^{24} = 16\,777\,216,$$

en prenant l'écu pour l'unité. Si l'on y substituait le ducat, employé dans l'énoncé du problème, le jeu finirait au $25^{e}$ coup, et la mise de Paul se réduirait à

$12\frac{1}{2}$. Mais si l'on regarde comme superflue toute augmentation faite à la somme $2^{24}$, pourquoi ne se bornerait-on pas aussi bien à la somme $2^{24}-1$, qui en diffère si peu ; et en continuant ainsi de proche en proche, où s'arrêterait-on ?

Si on voulait terminer le jeu lorsqu'il y a une probabilité très-voisine de l'unité que pile a dû arriver, et une probabilité contraire aussi petite que celle qu'on est convenu de regarder comme nulle, en prenant $\frac{1}{10000}$ pour celle-ci, le jeu devrait finir au 13ᵉ coup, puisque la probabilité de n'amener pile qu'au 14ᵉ est $\frac{1}{16384}$. Dans cette détermination, la mise de Paul ne serait que de 6 ducats et $\frac{1}{2}$ ; mais si on regarde comme nulle la probabilité $\frac{1}{10000}$, et la fraction $\frac{9999}{10000}$ comme la *certitude morale*, ainsi que le voulait Buffon, que ferait-on pour les probabilités $\frac{9998}{9999}$ et $\frac{10000}{10001}$, qui diffèrent très-peu de la précédente ? Il est donc impossible d'assigner des limites aussi fixes à des évaluations qui conservent toujours quelque chose de vague. Je reprendrai ces considérations dans la suite ; mais ce que je viens de dire suffit pour conclure, avec Daniel Bernoulli et Condorcet, que les explications précédentes sont peu fondées.

77. La formule de Bernoulli entre mieux dans la difficulté, parce qu'elle ne met aucun terme à la durée du jeu. En désignant par $a$ le bien de Paul, et par $x$ ce qu'il doit mettre au jeu, son avoir sera, si pile arrive

au 1ᵉʳ coup, $a-x+1$ ; au 2ᵉ, $a-x+2$ ; au 3ᵉ, $a-x+4$,

correspondant à des probabilités

$$\frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{4}, \qquad \frac{1}{8},$$

ce qui donne pour la valeur physique de la fortune,

d'après les conditions du jeu,

$$X=(a-x+1)^{\frac{1}{2}}(a-x+2)^{\frac{1}{4}}(a-x+4)^{\frac{1}{8}}\text{.etc.},$$

qu'il faudra égaler au bien antérieur $a$, pour exprimer que le sort de ce joueur n'est pas changé : on aura donc l'équation

$$a=(a-x+1)^{\frac{1}{2}}(a-x+2)^{\frac{1}{4}}(a-x+4)^{\frac{1}{8}}\text{.etc.},$$

dont le second membre doit renfermer un nombre infini de facteurs.

On ne tirerait pas aisément d'une semblable équation les valeurs de $x$; mais en faisant $a-x=a'$, elle devient

$$a=(a'+1)^{\frac{1}{2}}(a'+2)^{\frac{1}{4}}(a'+4)^{\frac{1}{8}}(a'+8)^{\frac{1}{16}}\text{.etc.},$$

et conduit à la valeur de $a$ par celle de $a'$, d'où l'on déduit ensuite celle de $x$. On peut la mettre sous la forme

$$a=1^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{1}{8}}.8^{\frac{1}{16}}\text{.etc.}\times$$
$$(1+a')^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{a'}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{a'}{4}\right)^{\frac{1}{8}}\left(1+\frac{a'}{8}\right)^{\frac{1}{16}}\text{.etc.},$$

où l'on voit que les facteurs du second membre décroissent toujours, et ont pour limite l'unité, puisque dans leurs expressions générales

$$2^{\frac{n-1}{2^n}},\quad\text{et}\quad\left(1+\frac{a'}{2^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2^n}},$$

l'exposant tend à s'anéantir.

Si on prend les logarithmes de chaque membre, il

viendra

$$\mathrm{l}\,a = \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\frac{3}{16}+\text{etc.}\right)\mathrm{l}\,2$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{l}(1+a')+\frac{1}{4}\mathrm{l}\left(1+\frac{a'}{2}\right)+\frac{1}{8}\mathrm{l}\left(1+\frac{a'}{4}\right)$$
$$+\frac{1}{16}\mathrm{l}\left(1+\frac{a'}{8}\right)+\text{etc.}$$

La série qui multiplie l2 se décompose en

$$\frac{1}{4}\left[1+2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{2}\right)^2+\text{etc.}\right]=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-2}=1\,;$$

la première partie du second membre a donc pour limite l2. Quant à la seconde partie, elle devient assez convergente lorsque $a'$ n'est pas considérable, et tend à se convertir en une progression par quotiens, parce que le logarithme de $1+z$ approche de plus en plus d'être proportionnel à $z$, lorsque cette quantité est une fraction qui décroît sans cesse; et comme alors $\mathrm{l}(1+z) < 0{,}434z$, il est facile de s'assurer que la valeur de $a$ reste finie, tant que $a'$ est fini, ce qui détruit le paradoxe.

Quand on fait $a'=0$, on obtient $a=2$; cela veut dire que si Paul ne possédait que 2 ducats, et qu'il les mît à ce jeu, la valeur morale de son avoir ne changerait pas.

Si l'on pose $a-x=100$, et qu'on emploie 10 termes, on trouvera que $a=104{,}38$, à moins de $\frac{1}{100}$ près; d'où $x=4{,}38$ (*).

78. De ce que la formule de Daniel Bernoulli paraît satisfaire assez bien aux diverses épreuves où nous l'avons mise, s'ensuit-il qu'il faut la substituer à celle

(*) Après des calculs un peu différens des précédens, on lit dans la *Theorie analytique des Probabilités* (p. 441), $a=107{,}89$; mais c'est probablement une faute d'impression.

de l'espérance mathématique? Condorcet ne le pensait pas, et avant lui, Nicolas Bernoulli (neveu de Jean) était du même avis. Voici l'exposé de leurs motifs. Nicolas Bernoulli ne voyait dans les résultats de la première de ces formules, que des conseils propres à éclairer les personnes qui voudraient se livrer à des spéculations sur le hasard, et non pas des règles pour établir un partage équitable entre des joueurs. Daniel Bernoulli, qui nous a fait connaître cette opinion de Nicolas, déclare lui-même, au commencement de son Mémoire, qu'un tribunal devrait suivre d'autres principes que ceux qui servent de fondement à sa formule. *Placer deux joueurs dans une situation telle qu'aucun d'eux n'ait l'avantage sur l'autre*, ce que fait la règle des paris, est aussi ce que prescrit la justice rigoureuse (*). La formule de Bernoulli, qui met au contraire une différence entre les deux joueurs, en favorisant celui qui a le moins de fortune, est destructive de toute convention de jeu. L'une des par-

---

(*) Quod cùm nulla sit ratio, cur expectanti plus tribui debeat uni quàm alteri, unicuique æquæ sint adjudicandæ partes; *rationes autem nullas considerari, quæ personarum statum respiciant, solasque illas perpendi, quæ ad conditiones sortis pertineant. Talem sententiam ferant judices supremi publicâ auctoritate constituti, at verò hoc loco non judicia sed consilia danda sunt; regulæ nempè, quibus quisque suam sibimet estimare debeat sortem pro diversâ rerum suarum constitutione.* Voilà sous quel point de vue Daniel Bernoulli présente ses principes (pag. 175—176 du Mém. cité).

Voyons à présent ce qu'il rapporte de la lettre de Jacques Bernoulli. *Is verò testatus est nequaquam sibi displicere meam de mensura sortium sententiam, si modò quivis suæ sortis æstimator sit, aliter verò si rem habere, si tertius instar judicis secundùm equitatem et justitiam unicuique collusorum sortem assignare debeat.* Et il ajoute : *Id ipse pariter in* § 2 *exposui* (pag. 189—190 du Mém. cité).

ties, en consultant ses intérêts et sa situation particulière, peut bien sentir que la perte lui portant un plus grand dommage, il lui serait avantageux de diminuer sa mise et d'augmenter son gain; mais l'autre partie peut-elle consentir à un pareil arrangement? Le mal ne serait pas grand, sans doute, s'il résultait de cette difficulté de s'entendre un affaiblissement dans le goût du jeu; mais pour prononcer sur le mérite de la formule de Bernoulli, il faut examiner si la théorie ordinaire des probabilités ne motive pas aussi bien les conseils donnés par le seul emploi de la raison.

Cette théorie établissant la nécessité de répéter l'épreuve du hasard un nombre de fois de plus en plus considérable pour atteindre à des probabilités un peu fortes, de ne pas perdre au-delà d'une certaine portion, non de la première mise, mais de la somme de toutes (63), somme qui va toujours croissant, n'en résulte-t-il pas naturellement le conseil de ne pas aventurer des sommes considérables dans un jeu même égal, lorsqu'on ne peut pas en répéter souvent l'épreuve, et par conséquent de n'exposer chaque fois qu'une très-petite partie de ce que l'on possède? La formule de Bernoulli, dira-t-on, fait plus; elle donne une mesure précise de l'influence que ce conseil doit exercer sur le joueur. A cela on peut répondre, d'après ce qui a déjà été dit dans le n° 69, qu'il ne faut pas attacher à des valeurs numériques déduites d'hypothèses qu'on peut varier de bien des manières, plus d'importance qu'elles n'en ont réellement; et Daniel Bernoulli m'en fournira lui-même la preuve. Il observe qu'un homme dénué de fortune, n'ayant que la probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner une somme de 20000$^{fr.}$, par exemple, aurait tort de ne pas céder cette espérance pour 9000$^{fr.}$, quoique sa valeur soit 10000$^{fr.}$, suivant la règle ordi-

naire. Voyons ce que donne la sienne. Soit toujours $a$ le bien antérieur; la fortune physique du possesseur de l'espérance dont il s'agit serait

$$(a+20000)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}}.$$

Souvenons-nous que $a$ ne peut jamais être nul (70), et faisons $a=500^{fr.}$, ce qui est bien au-dessous du capital le plus faible auquel puisse répondre le prix annuel de l'industrie d'un homme; nous trouverons $\sqrt{500.20500}=3202$ environ, d'où retranchant 500 il restera $2702^{fr.}$, somme très-inférieure à $10000^{fr.}$; mais pouvons-nous dire que c'est bien là le minimum de ce qu'il peut accepter en échange? Ne peut-il pas se trouver dans une situation qui lui impose l'obligation de se contenter à moins? N'est-ce pas avec raison que Bernoulli lui-même dit que 2400 pièces, pour un homme qui en possède déjà autant, mais qui en a besoin de 4800 pour racheter sa liberté, ont beaucoup plus de prix que pour celui qui ne possède rien, mais qui est libre. De semblables circonstances ne peuvent être soumises au calcul; et c'est abuser des formules, que de les employer à leur évaluation. Pour se rendre compte comment $10000^{fr.}$ représentent l'espérance mathématique, dans l'exemple qui nous occupe, il faut concevoir que ce hasard puisse se répéter un grand nombre de fois; alors il deviendra de plus en plus probable que les pertes et les gains balancés donneront à peu près $10000^{fr.}$ pour la valeur moyenne du résultat final.

79. Considérée ainsi comme valeur moyenne des pertes et des gains, la formule de l'espérance mathématique ne peut être employée qu'autant qu'une telle valeur peut exister et remplacer la valeur réelle, qui est incon-

nue ; or cela n'a pas lieu pour le problème de Pétersbourg (76). Un jeu dont la décision embrasse un nombre infini de coups successifs, et qui par conséquent ne saurait être considéré comme devant se répéter, ne comporte point, par cette raison, de valeur moyenne des événemens divers qu'il peut amener. Il ne faut pas même en reculer la limite à l'infini, pour sentir l'absurdité qu'il y aurait à faire usage d'une valeur moyenne. On a déjà vu que Paul ne doit mettre au jeu que 6 ducats $\frac{1}{2}$, si on borne le jeu à 13 coups ; mais alors si pile n'arrive pas, Pierre devrait donner $2^{12} = 4096$ ducats, somme dont la perte ne serait réparée que par le gain d'un nombre de parties trop grand pour qu'on puisse en concevoir une espérance raisonnable. Si on allait jusqu'à 27 coups, l'unité étant 1 centime seulement, la mise de Paul ne serait que 13 centimes $\frac{1}{2}$, et Pierre pourrait perdre 1 342 177$^{fr}$,28 ; la probabilité de cette perte étant $\frac{1}{2^{27}}$, serait extrêmement petite, mais non pas encore nulle.

La formule de l'espérance mathématique, entendue comme elle doit l'être (61), paraît donc d'accord avec les notions les plus saines sur le jeu, admet les conséquences de ces notions, et fortifie les leçons de la prudence, en conduisant toujours à la nécessité de ne risquer que de petites sommes à-la-fois, ce qui ne permet de faire du jeu qu'un amusement sans conséquence. Si on s'écarte de cette sage réserve, elle ne peut plus que mettre une parité exacte de danger entre des hommes avides, dont chacun spécule sur la ruine de l'autre ; c'est une sorte de duel dans leqnel il faut égaliser les armes ; car suivant l'observation très-juste de Condorcet, le but de l'appréciation des événemens livrés au hasard, est atteint quand les joueurs sont placés

dans le même état; mais on ne saurait faire que celui d'un homme qui joue soit le même que s'il ne jouait pas.

Si donc la prudence permet de se livrer à des spéculations sur les hasards, ce ne peut être qu'à celles qui par leur nature doivent rapporter au-delà de ce que les probabilités assignent pour l'espérance mathématique. Alors, suivant l'observation du n° 64, plus l'entreprise est répétée, plus la probabilité du succès augmente. De pareilles spéculations, dans les jeux proprement dits, blessent les lois de la probité; et si des considérations particulières permettent aux Gouvernemens de les tolérer, l'opinion publique, plus sévère, doit les flétrir : mais il en est tout autrement des spéculations de commerce, des assurances et de toutes les entreprises où le bénéfice est acquis comme salaire d'un travail utile, et en échange de valeurs réelles.

## SECTION SECONDE.

*Détermination de la probabilité* à posteriori, *c'est-à-dire lorsque le nombre total des chances est illimité et que ses rapports avec le nombre des chances de chaque espèce, sont inassignables.*

80. QUAND on ne connaît point la forme du dé, ou la condition de l'urne qui produit les événemens observés, il faut, pour remonter à leur probabilité, considérer toutes les formes ou les conditions dont ils peuvent resulter, afin d'en déduire une sorte de probabilité moyenne qui approchera d'autant plus d'être la véritable, que le nombre des observations sera plus grand (40).

Si, par exemple, on a tiré successivement d'une urne 3 boules blanches et 1 noire, en ayant soin de remettre chaque fois la boule sortie, qu'on sache que le nombre total des boules est 4, tant blanches que noires, mais qu'on ignore combien il y en a de chaque sorte, on pourra faire, sur la condition de cette urne, les 3 hypothèses ci-dessous :

3 boules blanches, 1 noire, d'où $e = \frac{3}{4}, f = \frac{1}{4}$,

2 .............. 2 .......... $e = \frac{2}{4}, f = \frac{2}{4}$,

1 .............. 3 .......... $e = \frac{1}{4}, f = \frac{3}{4}$,

$e$ désignant la probabilité de l'arrivée d'une boule blanche, $f$ celle de l'arrivée d'une boule noire. La probabilité de l'événement composé de la sortie de 3 boules blanches et de 1 boule noire, étant exprimée par $4e^3f$ (22), deviendra successivement

$$\frac{27}{64}, \quad \frac{16}{64}, \quad \frac{3}{64}.$$

La dernière hypothèse, qui donne la plus petite probabilité pour cet événement composé, est aussi en elle-même beaucoup moins probable que les deux autres hypothèses; car si l'urne ne contenait qu'une seule boule blanche, il faudrait que cette même boule fût sortie trois fois de suite; on conçoit qu'il y aurait moins de difficulté s'il y avait 2 boules blanches, et encore moins s'il y en avait 3. La facilité avec laquelle chaque hypothèse amènerait les événemens observés, donne naturellement la probabilité de cette hypothèse; car plus elle offre de combinaisons favorables à la production de ces événemens, plus on a occasion d'en répéter le jugement *de possibilité* (5 et 6). C'est ainsi qu'on a posé pour principe que *les probabilités des causes (ou des hypothèses) sont proportionnelles aux probabilités que ces causes donnent pour les événemens observés* (*).

Dans l'exemple actuel, les probabilités des trois hypothèses établies sont proportionnelles aux nombres 27, 16, 3; leur somme doit être d'ailleurs égale à

(*) Cet énoncé se trouve dans le tome VI des *Savans étrangers*, p. 623. Bayes, dans les *Transactions philosophiques* de 1763 (p. 370), et Price, dans celles de 1764 (p. 296), s'étaient déjà occupés de ce sujet; mais M. Laplace l'a réduit le premier à la forme analytique sous laquelle on le traite maintenant, qui en facilite et en généralise beaucoup les applications.

l'unité, puisque l'une de ces hypothèses a nécessairement lieu (8) : il suit donc de là que chacune des probabilités dont il s'agit est égale au nombre qui lui correspond, divisé par la somme des trois nombres, ce qui donne les fractions

$$\frac{27}{46}, \quad \frac{16}{46}, \quad \frac{3}{46}.$$

On peut dire aussi que sur les combinaisons fournies par l'ensemble des hypothèses, les $27+16+3=46$ qui s'accordent avec les événemens arrivés, sont les seules possibles, et que la probabilité de chaque hypothèse se détermine comme celle d'un événement, en divisant le nombre de cas où elle peut avoir lieu, par celui de tous les cas possibles, ce qui donne les mêmes fractions que ci-dessus.

Enfin il faut remarquer encore que ces fractions, ou *les probabilités des diverses hypothèses, se forment en divisant la probabilité de l'événement composé, calculée dans chaque hypothèse, par la somme de ses probabilités dans toutes les hypothèses* (*).

Il est facile de voir que cette règle est générale; car si on désigne par $h$, $h'$, $h''$, $h'''$ les probabilités des diverses hypothèses susceptibles d'amener l'événement composé qui a eu lieu, et par $a$, $a'$, $a''$, $a'''$ les pro-

(*) En traitant l'exemple ci-dessus, Condorcet, de qui je l'ai emprunté (*Elémens du Calcul des Probabilités*, p. 65), fait cinq hypothèses, c'est-à-dire toutes celles qui peuvent se présenter quand on n'a pas égard aux événemens observés. En effet, on peut alors supposer que les 4 boules sont blanches, ou qu'elles sont noires; mais comme ni l'une, ni l'autre de ces dernières hypothèses ne saurait amener les événemens observés, elles donnent o pour leur probabilité, ce qui ne change rien au résultat obtenu ci-dessus.

babilités que chaque hypothèse donne pour ces événemens, on aura

$$h + h' + h'' + h''' = 1,$$
$$h : h' : h'' : h''' :: a : a' : a'' : a''';$$

d'où il résulte

$$h = \frac{a}{T}, \quad h' = \frac{a'}{T}, \quad h'' = \frac{a''}{T}, \quad h''' = \frac{a'''}{T},$$

$T$ représentant $a + a' + a'' + a'''$.

81. Quand on a déterminé la probabilité de chaque hypothèse possible, on en déduit facilement la probabilité des événemens qui peuvent arriver aux tirages suivans; dans notre exemple, celles d'amener au 5e tirage une boule blanche ou une boule noire. Il n'est pas difficile de voir que ce problème revient à celui du n° 19, et se résout par les probabilités composées. Les trois hypothèses établies peuvent être considérées comme trois urnes différentes, de l'une desquelles doit nécessairement sortir l'événement attendu. La probabilité de cet événement se composera donc de celle qu'il a dans chaque hypothèse, multipliée par celle de l'hypothèse : ainsi on aura pour la sortie d'une boule blanche, au 5e tirage,

$$\frac{27}{46} \times \frac{3}{4} + \frac{16}{46} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \times \frac{1}{4} = \frac{116}{184},$$

et pour celle de la sortie d'une boule noire,

$$\frac{27}{46} \times \frac{1}{4} + \frac{16}{46} \times \frac{2}{4} + \frac{3}{46} \times \frac{3}{4} = \frac{68}{184}.$$

On trouverait de même, pour tout autre exemple, que *la probabilité d'un nouvel événement simple s'ob-*

*tient en calculant, d'après les événemens passés, la probabilité des diverses hypothèses possibles, et faisant la somme des produits de ces probabilités par celles de l'événement, prises dans chaque hypothèse.*

82. Pour construire des formules générales sur les principes énoncés précédemment, il faut d'abord observer que dans les événemens naturels, le nombre total des chances doit être regardé comme infini, ou toutes les probabilités simples, c'est-à-dire tous les rapports compris entre o et 1 comme possibles, tant qu'on est dans l'ignorance absolue du véritable ou de limites plus étroites entre lesquelles il se trouve renfermé. C'est donc dans un nombre d'hypothèses considéré comme infini, qu'il faut déterminer les probabilités de l'événement composé qui a eu lieu, et voici de quelle manière on y parvient.

Soient $A$ et $B$ deux événemens contradictoires, dont l'un est arrivé $m$ fois et l'autre $n$ fois. Supposons l'unité divisée en parties très-petites, représentées par $\alpha$, et concevons que la probabilité simple de l'événement $A$ puisse être l'un quelconque des termes de la série

$$\alpha,\quad 2\alpha,\quad 3\alpha,\quad 4\alpha,\quad \text{etc.};$$

enfin, pour abréger, désignons par $C$ le coefficient du terme affecté de $e^m f^n$ dans le développement de $(e+f)^{m+n}$. Cela posé, les diverses probabilités de l'événement composé de $m$ fois $A$ et de $n$ fois $B$ formeront la suite

$$C\alpha^m(1-\alpha)^n,\ C(2\alpha)^m(1-2\alpha)^n,\ C(3\alpha)^m(1-3\alpha)^n\ldots$$
$$\ldots\ldots C(1-\alpha)^m\alpha^n,$$

dont un terme quelconque peut être représenté par $Cx^m(1-x)^n$; la somme

$$C\{\alpha^m(1-\alpha)^n+(2\alpha)^m(1-2\alpha)^n+(3\alpha)^m(1-3\alpha)^n\ldots$$
$$\ldots\ldots+(1-\alpha)^m\alpha^n\}=C\int$$

sera le dénominateur de la probabilité particulière de chaque hypothèse (80). Le calcul intégral conduit sans difficulté à la limite de cette somme (*Voy.* note III.); mais comme le sujet est très-important, je vais exposer, pour les lecteurs qui ne connaissent point ce calcul, le procédé par lequel Condorcet y a suppléé dans cette occasion (*).

On multiplie d'abord la série $f$ par $\alpha$, et le terme général étant alors représenté par $\alpha x^m(1-x)^n$, la somme de tous ceux qui le précèdent peut l'être par

$$Ax^{m+1}(1-x)^n + Bx^{m+2}(1-x)^{n-1} + Cx^{m+3}(1-x)^{n-2} + \text{etc.},$$

$A$, $B$, $C$, etc. désignant des coefficiens indéterminés. Si l'on fait croître $x$ de la quantité $\alpha$, cette somme deviendra

$$A(x+\alpha)^{m+1}(1-x-\alpha)^n + B(x+\alpha)^{m+2}(1-x-\alpha)^{n-1} + C(x+\alpha)^{m+3}(1-x-\alpha)^{n-2} + \text{etc.};$$

et si l'on en retranche la valeur précédente, il restera l'accroissement qu'elle a reçu et qui est précisément le terme $\alpha x^m(1-x)^n$ : on aura donc cette équation

$$\begin{aligned} &A\{(x+\alpha)^{m+1}(1-x-\alpha)^n - x^{m+1}(1-x)^n\} \\ +\,&B\{(x+\alpha)^{m+2}(1-x-\alpha)^{n-1} - x^{m+2}(1-x)^{n-1}\} \\ +\,&C\{(x+\alpha)^{m+3}(1-x-\alpha)^{n-2} - x^{m+3}(1-x)^{n-2}\} \\ +\,&\text{etc.} = \alpha x^m(1-x)^n \ldots\ldots\ldots (\text{I}). \end{aligned}$$

Pour développer commodément cette équation, on

(*) *Elémens du Calcul des Probabilités*, p. 70. Ce procédé n'est dans le fait qu'une vérification du résultat donné par le calcul intégral; mais il est utile de ramener à l'algèbre ordinaire la démonstration d'une formule sur laquelle repose toute cette partie du calcul des probabilités.

fera $1-x=z$, et on observera que la seconde ligne peut se tirer de la première, en changeant $A$ en $B$, $m+1$ en $m+2$, $n$ en $n-1$, et ainsi des autres. En ne s'occupant donc que de celle-ci, on obtiendra les expressions

$$\begin{aligned} & A(x+\alpha)^{m+1}(z-\alpha)^n \\ = & A\{x^{m+1}+(m+1)\alpha x^m+\text{etc.}\}(z^n-n\alpha z^{n-1}+\text{etc.}) \\ = & Ax^{m+1}z^n+(m+1)A\alpha x^m z^n-nA\alpha x^{m+1}z^{n-1} \\ + & A'\alpha^2+A''\alpha^3+\text{ etc.}, \end{aligned}$$

où les termes contenant des puissances de $\alpha$ supérieures à la première sont seulement indiqués. Retranchant du dernier résultat le terme $Ax^{m+1}(1-x)^n=Ax^{m+1}z^n$, il restera, pour la première ligne de l'équation (I),

$$(m+1)A\alpha x^m z^n-nA\alpha x^{m+1}z^{n-1}+A'\alpha^2+\text{etc.}$$

On voit par là que tous les termes de cette équation sont divisibles par $\alpha$, ensorte qu'elle se réduit à

$$\begin{aligned} & A\{(m+1)x^m z^n - nx^{m+1}z^{n-1}\}+A'\alpha+\text{etc.} \\ + & B\{(m+2)x^{m+1}z^{n-1}-(n-1)x^{m+2}z^{n-2}\}+B'\alpha+\text{etc.} \\ + & C\{(m+3)x^{m+2}z^{n-2}-(n-2)x^{m+3}z^{n-3}\}+C'\alpha+\text{etc.} \\ + & \text{etc.}=x^m z^n. \end{aligned}$$

Cette même équation subsistant toujours, quelque petite que soit la valeur de $\alpha$, s'étend, lorsqu'on y fait $\alpha=0$, au cas où le nombre $\frac{1}{\alpha}-1$ des termes de la suite devient infini; et comme elle doit avoir lieu, quel que soit $x$, il faudra l'ordonner par rapport aux quantités $x$ et $z$, ce qui lui fera prendre la forme

$$\begin{aligned} & \{A(m+1)-1\}x^m z^n-\{nA-(m+2)B\}x^{m+1}z^{n-1} \\ - & \{(n-1)B-(m+3)C\}x^{m+2}z^{n-2}-\text{etc.}=0. \end{aligned}$$

Alors en égalant séparément à zéro les coefficiens de

chaque terme, on aura

$$A(m+1)-1=0,\text{ d'où } A=\frac{1}{m+1},$$

$$nA-(m+2)B=0,\quad B=\frac{n}{(m+1)(m+2)},$$

$$(n-1)B-(m+3)C=0,\quad C=\frac{n(n-1)}{(m+1)(m+2)(m+3)},$$

etc.

La suite

$$\alpha\{\alpha^m(1-\alpha)^n+(2\alpha)^m(1-2\alpha)^n\ldots+(x-\alpha)^m(1-x+\alpha)^n\}$$

a donc pour limite

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1}+\frac{nx^{m+2}(1-x)^{n-1}}{(m+1)(m+2)}$$
$$+\frac{n(n-1)x^{m+3}(1-x)^{n-2}}{(m+1)(m+2)(m+3)}\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots1.x^{m+n+1}}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n+1)};$$

car la valeur de cette expression naît avec la série, puisqu'elle s'anéantit lorsque $x=0$, ainsi que le terme général $x^m(1-x)^n$ (*).

Le dernier terme de la suite étant $(1-\alpha)^m\alpha^n$, répond à $x=1-\alpha$; mais plus $\alpha$ est petit, plus cette valeur de $x$ approche de 1; on peut donc prendre l'unité pour dernière valeur de $x$, et alors la limite de la suite complète se réduit à

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots1}{(m+1)(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n+1)};$$

telle est la limite des valeurs de $\alpha\int$.

(*) Ceux qui savent les règles du calcul intégral, verront bien que l'observation ci-dessus a pour but de montrer qu'il ne faut pas ajouter de constante arbitraire à l'expression trouvée.

83. Devant faire un fréquent usage de l'expression de la limite considérée ci-dessus, je représenterai cette limite par $S_x^{(m,n)}$, lorsque j'y regarderai $x$ comme indéterminée ; mais dans les autres cas, j'indiquerai la valeur qui répond au dernier terme. Ainsi l'expression $S_1^{(m,n)}$ désignera la limite de la série prise depuis le terme où $x=0$ jusqu'au dernier terme où $x=1$ ; sa valeur est la formule qui termine la page précédente. $S_{\frac{1}{2}}^{(m,n)}$ désignerait la limite de la même série, prise en s'arrêtant au terme où $x=\frac{1}{2}$. Il suit de là que

$$S_1^{(m,n)} - S_{\frac{1}{2}}^{(m,n)}$$

donne la limite de la somme de tous les termes de la série $\alpha f$, à partir de celui où $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à celui où $x=1$.

Les valeurs de ces expressions se simplifient beaucoup lorsque $n=0$ : le développement général de la page précédente se réduit à son premier terme..... $\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1}$ ; et à cause de $(1-x)^0=1$, on a

$$S_x^{(m)} = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \text{et} \quad S_1^{(m)} = \frac{1}{m+1},$$

quand on fait $x=1$.

84. Ces préliminaires étant bien compris, il est facile de s'élever à la probabilité des événemens futurs. Suivant ce qui a été dit au n° 80, la probabilité d'une hypothèse ou d'un rapport quelconque $x$, est

$$\frac{x^m(1-x)^n}{f} = \frac{\alpha x^m(1-x)^n}{\alpha f}.$$

En la multipliant par $x$ (81), on en déduira la probabilité d'obtenir un événement $A$ de plus, $\frac{\alpha x^{m+1}(1-x)^n}{\alpha f}$, d'où l'on tirera ce qui convient à chaque hypothèse en particulier, en y mettant successivement $\alpha$, $2\alpha$, $3\alpha$, etc. à la place de $x$; la limite de la somme de ces résultats sera par conséquent $\frac{S_1^{(m+1,n)}}{S_1^{(m,n)}}$, et la valeur du numérateur se déduira de celle de $S_1^{(m,n)}$, par le changement de $m$ en $m+1$. En substituant ces valeurs, il viendra

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1}{(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+n+2)} \times \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 1} = \frac{m+1}{m+n+2},$$

après la suppression des facteurs communs au dividende et au diviseur.

Si l'on demandait la probabilité de l'arrivée d'un nouvel événement $B$, la probabilité particulière de cet événement, dans l'hypothèse correspondante à $x$, étant $(1-x)$, on aurait les expressions

$$\frac{\alpha x^m(1-x)^n}{\alpha f}(1-x) = \frac{\alpha x^m(1-x)^{n+1}}{\alpha f},$$

$$\frac{S_1^{(m,n+1)}}{S_1^{(m,n)}} = \frac{n+1}{m+n+2}.$$

Au lieu des probabilités $\frac{m+1}{m+n+2}$ et $\frac{n+1}{m+n+2}$ on

aurait, suivant l'usage commun, les expressions $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{m+n}$ formées en divisant le nombre de fois que chaque événement a paru, par le nombre total des événemens observés, et qui ne s'accordent avec les précédentes que lorsque $m=n$, auquel cas les quatre fractions ci-dessus deviennent $\frac{1}{2}$ : dans toute autre circonstance, la première évaluation diffère de la seconde. Si, par exemple, $m=3$ et $n=2$, l'une donne $\frac{4}{7}$ et $\frac{3}{7}$, l'autre $\frac{3}{5}$ et $\frac{2}{5}$; mais ce qu'il faut bien remarquer, c'est qne l'évaluation rigoureuse s'approche sans cesse de l'autre. Cela se voit en divisant par $m+n$ les deux termes des premières probabilités; elles prennent alors les formes

$$\frac{\frac{m}{m+n}+\frac{1}{m+n}}{1+\frac{2}{m+n}} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{n}{m+n}+\frac{1}{m+n}}{1+\frac{2}{m+n}},$$

qui ne deviennent $\frac{m}{m+n}$ et $\frac{n}{m+n}$ qu'en supposant infini le nombre $m+n$.

La différence

$$\frac{m}{m+n}-\frac{m+1}{m+n+2}=\frac{m-n}{(m+n)(m+n+2)},$$

étant positive lorsque $m>n$, montre que celui des deux événemens qui est arrivé le plus souvent augmente sans cesse de probabilité lorsque les nombres $m$ et $n$ conservent la même subordination dans leurs accroissemens. Le contraire a lieu quand $m<n$. Ces changemens sont remarquables parce qu'ils sont produits par la seule répétition des faits; ainsi la théorie des probabilités *à posteriori* s'accorde bien avec celle de Ber-

noulli sur les épreuves successives (28), puisqu'il résulte de l'une comme de l'autre, que le rapport du nombre des événemens $A$ ou $B$, au nombre total des événemens observés, a pour limite leur probabilité simple.

85. La probabilité que sur un nombre $p$ de renouvellemens du même hasard, il arrivera un nombre $p-q$ d'événemens $A$, et un nombre $q$ d'événemens $B$, s'obtient aussi sans difficulté, par les principes exposés précédemment. Dans l'hypothèse correspondante à $x$, la probabilité de cet événement composé est exprimée par $x^{p-q}(1-x)^q$, si la succession des événemens simples est déterminée, et par

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots\ldots q}\,x^{p-q}(1-x)^q = C'x^{p-q}(1-x)^q,$$

dans le cas contraire (20). Cette probabilité étant multipliée par $\frac{\alpha x^m(1-x)^n}{\alpha f}$, probabilité de l'hypothèse, on aura pour celle qu'on cherche

$$\frac{\alpha x^{m+p-q}(1-x)^{n+q}}{\alpha f}, \quad \text{ou} \quad \frac{C'\alpha x^{m+p-q}(1-x)^{n+q}}{\alpha f};$$

prenant la limite de la somme, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et faisant abstraction du coefficient $C'$, qui est indépendant de $x$, il viendra

$$\frac{S_1^{(m+p-q,\,n+q)}}{S_1^{(m,\,n)}} =$$

$$\frac{(n+q)(n+q-1)\ldots\ldots 1}{(m+p-q+1)(m+p-q+2)\ldots(m+n+p+1)} \times \frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+n+1)}{n(n-1)\ldots\ldots\ldots 1},$$

expression que l'on peut simplifier par la suppression des facteurs depuis $n$ jusqu'à 1, qui multiplient et qui divisent en même tems, ce qui donnera

$$\frac{(n+q)(n+q-1)\ldots\ldots\ldots(n+1)}{(m+p-q+1)(m+p-q+2)\ldots(m+n+p+1)}\times$$
$$(m+1)(m+2)\ldots\ldots\ldots(m+n+1).$$

Lorsque $n > p-q$, on peut encore supprimer de même les facteurs depuis $m+p-q+1$ jusqu'à $m+n+1$ inclusivement, et la formule ci-dessus devient

$$\frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+p-q)(n+1)(n+2)\ldots(n+q)}{(m+n+2)(m+n+3)\ldots(m+n+p+1)}.$$

Si l'on prend, pour exemple, $p=3$, $q=1$, l'expression précédente donnera la probabilité de l'événement composé $AAB$, égale à

$$\frac{(m+1)(m+2)(n+1)}{(m+n+2)(m+n+3)(m+n+4)};$$

et si l'on divise par $m+n$ chacun des facteurs du numérateur et du dénominateur de cette fraction, on reconnaîtra aisément qu'elle tend sans cesse vers..... $\frac{m^2n}{(m+n)^3}$, probabilité composée qui résulterait des probabilités simples $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{m+n}$ (21). La même circonstance a lieu pour l'expression générale, et se prouve en développant cette expression avec le secours des formules qui servent à calculer par approximation les produits formés d'un grand nombre de facteurs : on trouve alors que si les nombres $m$ et $n$ sont très-grands par rapport aux nombres $p$ et $q$, elle a pour limite $\frac{m^{p-q}n^q}{(m+n)^p}$. (*Voyez* la note I).

Ainsi, plus le nombre des événemens observés augmente, moins les probabilités, soit simples, soit composées, déduites des formules précédentes, diffèrent des probabilités déterminées *à priori*, ou plus les rapports donnés par la succession des événemens représentent avec exactitude les probabilités simples. La possibilité de prendre les uns pour les autres s'est offerte si naturellement à ceux qui les premiers ont médité sur ce sujet, qu'ils l'ont regardée comme évidente par elle-même; mais on ne pouvait s'en rendre compte sans le secours du calcul, qui montre qu'au lieu de l'égalité conjecturée, il y a une approximation continuelle et de plus en plus rapide.

86. Au moyen de la formule que nous venons de construire, on réunit dans une expression toutes les probabilités des événemens composés, auquels peut donner lieu un nombre $p$ de renouvellemens du même hasard; il suffit pour cela de faire successivement $q=0$, $=1$, $=2$, $=3$, etc. En conservant les coefficiens désignés par $C'$, pour laisser indéterminé l'ordre de succession des événemens simples, on formera la suite

$$\frac{S_1^{(m+p,n)}}{S_1^{(m,n)}}+\frac{p}{1}\,\frac{S_1^{(m+p-1,n+1)}}{S_1^{(m,n)}}$$

$$+\frac{p(p-1)}{1.2}\,\frac{S_1^{(m+p-2,n+2)}}{S_1^{(m,n)}}\cdots+\frac{S_1^{(m,n+p)}}{S_1^{(m,n)}},$$

qui tient ici la place que le développement du binome $(e+f)^p$ occupe dans la détermination *à priori* des probabilités pour les épreuves réitérées (22). La somme des termes, depuis le premier jusqu'au terme général

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots\ldots q}\,\frac{S_1^{(m+p-q,n+q)}}{S_1^{(m,n)}}$$

inclusivement, donnera la probabilité qu'il n'arrivera pas moins de $p-q$ événemens $A$, et pas plus de $q$ événemens $B$.

Quand $n=0$ et $q=0$, $S_1^{(m,n)}$ devient $S_1^{(m)}=\frac{1}{m+1}$ (83), et la formule précédente se réduit au seul terme

$$\frac{S_1^{(m+p)}}{S_1^{(m)}}=\frac{m+1}{m+p+1};$$

c'est la probabilité qu'on aura $p$ de fois de suite l'événement $A$, lorsqu'il a été observé $m$ fois sans interruption.

Si on partage le nombre $p$ en parties proportionnelles aux nombres $m$ et $n$, savoir $\frac{mp}{m+n}$ et $\frac{np}{m+n}$, la somme des termes de la suite précédente, à partir de celui qui est affecté de

$$S_1^{\left(m+\frac{mp}{m+n}+z,\ n+\frac{np}{m+n}-z\right)},$$

jusqu'à celui qui l'est de

$$S_1^{\left(m+\frac{mp}{m+n}-z,\ n+\frac{np}{m+n}+z\right)},$$

exprimera la probabilité que sur $p$ renouvellemens du même hasard, le nombre des événemens $A$ ne s'écartera pas en plus ou en moins, du nombre proportionnel à $m$, au-delà de $z$.

87. Avant de passer aux applications, je dois encore montrer, comme je l'ai annoncé en commençant cette

Section, que les probabilités déterminées *à posteriori* sont une sorte de *probabilités moyennes :* cela suit en effet de la manière de les obtenir, et jette un nouveau jour sur leur nature. L'expression $Cx^m(1-x)^n$ (82) étant la probabilité d'amener $m$ événemens $A$ et $n$ événemens $B$, lorsque leurs probabilités simples sont $x$ et $1-x$, la somme de ses valeurs calculées dans toutes les hypothèses possibles, divisée par leur nombre, en donnera la valeur moyenne (*Traité élémentaire d'Arithmétique*, règle d'alliage). Mais, faire la division d'une somme de quantités, c'est la même chose que de diviser séparément chacune de ces quantités, et d'ajouter ensuite les quotiens; et quand on divise l'unité en parties égales à $\alpha$, le nombre de ces parties est évidemment $\frac{1}{\alpha}$; or

$$\frac{x^m(1-x)^n}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha x^m(1-x)^n:$$

l'expression $CS_1^{(m,n)}$ peut donc être regardée comme celle d'une valeur moyenne prise entre les diverses probabilités qu'aurait, dans toutes les hypothèses possibles, l'événement composé qui a eu lieu.

Toutes les expressions subséquentes se déduisent également de ce point de vue. S'agit-il de la probabilité d'obtenir un nouvel événement $A$? La probabilité de l'événement composé de celui-ci et du précédent, étant $Cx^m(1-x)^n.x = Cx^{m+1}(1-x)^n$, dans l'hypothèse correspondante à $x$, aura pour valeur moyenne déduite de toutes les hypothèses, la limite de la série dont le terme général est

$$C\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{\frac{1}{\alpha}} = C\alpha x^{m+1}(1-x)^n,$$

c'est-à-dire $CS_1^{(m+1,n)}$.

Cette dernière probabilité doit aussi, suivant le principe des probabilités composées (17), se former en multipliant celle de l'événement composé qui a eu lieu, par celle d'obtenir un événement $A$ de plus; celle-ci est donc égale au quotient de la première divisée par la seconde, ce qui donne

$$\frac{CS_1^{(m+1,n)}}{CS_1^{(m,n)}} = \frac{S_1^{(m+1,n)}}{S_1^{(m,n)}},$$

comme on l'a trouvé dans le n° 84.

Les mêmes considérations donneraient, pour l'arrivée d'un nouvel événement $B$, la probabilité

$$\frac{S_1^{(m,n+1)}}{S_1^{(m,n)}}.$$

La somme de ces deux probabilités égale un, comme cela doit être; car pour faire la somme de deux suites de termes, on peut commencer par ajouter les termes qui se correspondent dans chacune, et prendre la somme des termes de la nouvelle suite formée par ces additions; on aura donc ainsi

$$\alpha x^{m+1}(1-x)^n + \alpha x^m(1-x)^{n+1} =$$
$$\alpha x^m(1-x)^n\{x + 1 - x\} = \alpha x^m(1-x)^n,$$

et passant aux limites des séries ajoutées et à celle

de leur somme, il viendra

$$S_x^{(m+1,\,n)} + S_x^{(m,\,n+1)} = S_x^{(m,\,n)};$$

d'où

$$\frac{S_1^{(m+1,\,n)} + S_1^{(m,\,n+1)}}{S_1^{(m,\,n)}} = \frac{S_1^{(m,\,n)}}{S_1^{(m,\,n)}} = 1.$$

88. On étendrait sans peine ces considérations aux formules générales des n$^{os}$ 85 et 86. La somme des termes dont se compose la dernière, qui embrasse tous les événemens possibles dans $p$ renouvellemens du même hasard, doit être égale à l'unité, comme celle des termes du développement de $(e+f)^p$. Il n'est pas difficile non plus de voir que toute cette théorie revient à prendre la probabilité moyenne de l'événement composé qui a eu lieu, pour l'unité à laquelle on compare les probabilités qui résultent des combinaisons de celui-ci avec les événemens futurs. On peut donc envisager aussi ces probabilités comme relatives à la première. De là vient qu'elles ne sont pas toujours les mêmes pour les mêmes combinaisons d'événemens futurs, ce qui n'arrive pas aux probabilités déterminées *à priori* (22).

En effet, la formule du n° 85 change de valeur avec $m$ et $n$, quoique $p$ et $q$ demeurent les mêmes; et puisque de nouveaux événemens observés modifient cette valeur, il s'ensuit évidemment qu'on ne doit pas étendre bien loin les conséquences que l'on en tire. La probabilité que, dans la succession des événemens futurs, $A$ et $B$ se répéteront suivant des rapports approchans de ceux qui ont été observés antérieurement (86), n'augmente pas sans cesse, comme par les probabilités déterminées *à priori* (28). Pour tirer de ces formules des résultats utiles, il faut toujours que le nombre

$p$ des événemens futurs soit fort petit à l'égard du nombre $m+n$ des événemens passés, et aussi que ce dernier soit très-considérable en lui-même, afin qu'il ne suffise pas de quelques nouvelles observations pour changer sensiblement les résultats déduits des précédentes. Avec ces restrictions, et pour des recherches dont la nature ne saurait exiger, ni même admettre, il faut le dire, une précision rigoureuse, on pourra presque toujours substituer aux formules de cette section celles de la première, ce qui est fort heureux; car les calculs, déjà très-longs par celles-ci, seraient le plus souvent impraticables par les autres, sans le secours des formules approximatives citées au n° 25; aussi ne ferai-je qu'indiquer quelques-unes des questions curieuses que M. Laplace a résolues sur cette matière.

89. Premièrement, il a donné l'expression approchée de la probabilité des résultats fournis par les Tables de mortalité, lorsqu'on connaît le nombre d'observations sur lequel elles ont été construites. Ces Tables, dont j'exposerai plus loin la formation, font connaître combien, sur un nombre d'individus nés en même tems, il en reste à un âge donné. Soit $m+n$ le premier nombre et $m$ le second; lorsqu'on veut étendre les conséquences de ces observations à un nombre $p$ d'enfans, on le divise en parties proportionnelles aux nombres $m$ et $n$, ce qui donne $\frac{pm}{m+n}$ pour celui des survivans, et $\frac{pn}{m+n}$ pour celui des morts. Alors pour apprécier la confiance que méritent ces résultats, il faut chercher les probabilités que l'erreur dont ils peuvent être susceptibles est renfermée dans des limites assez étroites, ce qui se fait en calculant la somme des termes

de l'expression du n° 86, à partir de celui qui est affecté de

$$S_1^{\left(m+\frac{pm}{m+n}+z,\ n+\frac{pn}{m+n}-z\right)},$$

jusqu'à celui qui l'est de

$$S_1^{\left(m+\frac{pm}{m+n}-z,\ n+\frac{pn}{m+n}+z\right)}.$$

Quoique M. Laplace ait déterminé assez simplement la valeur approchée de cette somme, il n'en donne point le calcul numérique; en effet, on sent assez dès à présent, et on en sera tout-à-fait convaincu dans la suite, qu'un pareil examen, devant être répété pour tous les âges, et sur des Tables très-multipliées, est à peu près impraticable, et que c'est principalement la finesse des artifices de calcul qu'il exige qui en constitue le mérite, comme de la plus grande partie des recherches de ce genre.

90. La seconde question dont je rapporterai l'énoncé et les résultats, a eu une application effective. Dès qu'on s'est aperçu du peu de variation qu'offraient le nombre des naissances et celui des décès, dans une population dont la marche n'était point troublée par les fléaux naturels ou politiques, on a cherché à déterminer les rapports de ces nombres avec le total de la population, en faisant le relevé des naissances et des morts, dans diverses parties du même état, et pour plusieurs années, en même tems qu'on se procurerait un dénombrement exact de la population de ces parties. Le rapport moyen, obtenu ainsi, a paru propre à faire connaître la population de l'état entier, d'une manière à la fois plus prompte et plus sûre qu'un dénombrement total des habitans, qui entraîne toujours

de grandes longueurs et souvent de grandes difficultés dans l'exécution. Cette idée, mise au jour d'abord par Moheau, a été suivie avec assiduité pendant 6 années, par Duséjour, Condorcet et M. Laplace (*). Ils s'étaient proposé d'appliquer successivement leurs calculs à chacune des 182 feuilles de la Carte de la France, par Cassini : ce travail s'étendait à 149 feuilles, lorsqu'il a été suspendu. La révolution devait en avoir changé les élémens ; c'est pourquoi M. Laplace l'a recommencé en 1799. Le gouvernement a ordonné, en conséquence, de faire avec soin, dans 30 départemens choisis parmi tous ceux qui composaient alors la France, le relevé exact des naissances, mariages et décès, depuis l'an 8 jusqu'à l'an 11 (du 22 septembre 1799, au 22 septembre 1802) ; il en est résulté :

| *Naissances.* | *Mariages.* | *Décès.* |
|---|---|---|
| 110312 garçons, | 46037, | 103659 hommes, |
| 105287 filles, | | 99443 femmes, |

et pour le montant de la population de ces mêmes départemens, à la seconde époque, 2 037 615 individus. Par ces nombres, les naissances des garçons sont à celles des filles dans le rapport de 22 à 21 ; les mariages aux naissances, dans celui de 3 à 14 ; enfin, celui de la population aux naissances annuelles, est de 28,353 environ à 1, ce qui portait à 42 500 000 le nombre des habitans du territoire soumis alors au gouvernement français, et où le nombre des naissances annuelles s'élevait environ à 1 500 000 (**). M. Laplace voulant ensuite se rendre compte de la précision qu'il devait

(*) Voyez les *Recherches sur la population de la France*, par Moheau, et les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, années 1784—1789.

(**) *Théorie analytique des Probabilités*, pag. 391.

attendre de tous ces soins, a cherché la probabilité, que cette évaluation ne serait pas en erreur de 500 000 : voici la traduction de l'énoncé de ce problème, au moyen des formules analytiques.

En représentant par $m+n$ le nombre des individus compris dans le premier dénombrement, par $n$ celui des naissances annuelles, qui est le $\frac{1}{3}$ de la somme des naissances des deux sexes, rapportées plus haut, pour 3 années; par $q$, le nombre des naissances dans toute l'étendue du territoire de la France, $p=\frac{(m+n)q}{n}$ exprimera la population de ce territoire, en y comprenant le nombre $q$ de naissances; et par conséquent

$$\frac{C'S_1^{\left(m+\frac{(m+n)}{n}q-q,\ n+q\right)}}{S_1^{(m,n)}}$$

sera la probabilité que cette population se composera des deux parties $\frac{(m+n)q}{n}-q$ et $q$.

Si donc on forme une suite de termes semblables au précédent, en donnant au premier exposant toutes les valeurs comprises entre $m+\left(\frac{m+n}{n}\right)q-q+z$ et $m+\left(\frac{m+n}{n}\right)q-q-z$, le second exposant demeurant toujours $n+q$, la somme de ces termes sera la probabilité que le dénombrement total conclu des naissances ne s'écartera pas du véritable au-delà du nombre $z$, soit en plus, soit en moins (*). En faisant $z=500\ 000$, les formules

(*) Les dénominations employées par M. Laplace sont un peu différentes de celles-ci : $m+n$ répond à $p$, $n$ à $q$, $q$ à $q'$ ; $x$ doit être changé en $1-x$, et réciproquement. M. Laplace ne détermine pas immédiatement la probabilité indiquée ci-dessus, mais sa contraire, en prenant $z$ depuis 500000 jusqu'à l'infini.

approximatives de M. Laplace lui donnent $\frac{1161}{1162}$ pour la valeur de cette probabilité ; et en portant $z$ à 700 000, la contraire de cette même probabilité serait insensible.

91. Dans tout ce qui précède, on a supposé que, pour la même hypothèse, la probabilité simple demeurait constante, c'est-à-dire qu'on remettait chaque fois dans l'urne la boule qui en était sortie. Cette supposition paraît applicable à la plupart des événemens naturels, parce qu'on regarde leurs causes comme agissant toujours de la même manière, ou le rapport des nombres de chances également possibles comme constant. Condorcet, cependant, ne s'est pas restreint à ces considérations; il a fait l'énumération des hypothèses que comporte le sujet, et les a soumises à une discussion approfondie (*). Il en distingue trois, « 1°. celle où la probabilité est constante, où l'on » suppose chaque événement (simple) également pro» bable, ou du moins la probabilité moyenne pour » chacun, déterminée d'une manière semblable (c'est » celle dont nous sommes occupés); 2°. celle où l'on » suppose cette probabilité variable, mais indépen» dante du tems où les événemens sont arrivés, et de » l'ordre dans lequel ils ont été observés; 3°. celle » où on les suppose dépendans, ou plutôt pouvant » dépendre de cet ordre. »

La troisième hypothèse, comme la plus générale, devrait être employée le plus souvent; car c'est un principe fondamental dans le calcul des probabilités, de prendre en considération tout ce qui n'est pas reconnu impossible. Or, ne peut-il pas arriver que les

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1783, pag. 539.

forces qui produisent certains événemens se modifient ou s'altèrent, et que par cette raison leur possibilité devienne plus grande ou moindre? Que s'ils résultent d'un développement successif, l'ordre de leur production, l'époque à laquelle ils paraissent, influent sur cette possibilité? Tant que ces suppositions ne seront pas formellement écartées par des lois positives bien constatées, les probabilités déduites de la première hypothèse ne pourront s'étendre qu'à un tems limité et devront être calculées souvent sur de nouvelles observations. On sent bien que les formules relatives aux dernières hypothèses sont hors des bornes prescrites à un traité élémentaire; je renverrai donc, pour ce sujet, le lecteur au Mémoire cité dans la note, et à la 3e partie de l'*Essai sur la probabilité des décisions*, etc.

*Détermination de la probabilité des causes (ou des hypothèses) par les observations.*

92. Lorsque l'on regarde comme possibles, dans la probabilité des événemens, tous les rapports compris entre 0 et 1, la probabilité de l'hypothèse correspondante à $x$ est exprimée par

$$\frac{\alpha x^m(1-x)^n}{\alpha \int} \quad (84).$$

Cette fraction, dont le dénominateur a pour limite la quantité finie $S_1^{(m,n)}$ (82), est d'autant plus petite que $\alpha$ est moindre, et que par conséquent le nombre des hypothèses établies est plus considérable. Si donc on suppose ce dernier nombre infini, $\alpha$ sera infiniment petit, et chaque hypothèse n'aura qu'une probabilité infiniment petite: aussi n'est-ce point la probabilité ab-

solue de l'une de ces hypothèses qu'on se propose de déterminer, mais les probabilités relatives, ce qui est très-facile, puisque si on désigne par $x'$ une autre hypothèse, on aura, suivant ce qui a été dit dans le n° 13, pour la probabilité de la première hypothèse par rapport à la seconde,

$$\frac{\alpha x^m(1-x)^n}{\alpha x^m(1-x)^n+\alpha x'^m(1-x')^n}=\frac{x^m(1-x)^n}{x^m(1-x)^n+x'^m(1-x')^n},$$

expression où $\alpha$ disparaît.

La valeur de cette expression dépend de celle des rapports $x$ et $x'$; et en la mettant sous la forme

$$\frac{1}{1+\frac{x'^m(1-x')^n}{x^m(1-x)^n}},$$

on verra qu'elle approche d'autant plus de l'unité, que $x^m(1-x)^n$ surpasse $x'^m(1-x')^n$ : elle atteindra donc la plus grande valeur dont elle soit susceptible, si, parmi tous les termes de la suite

$$\alpha^m(1-\alpha)^n, \quad (2\alpha)^m(1-2\alpha)^n, \quad \text{etc.},$$

on prend le moindre pour $x'^m(1-x')^n$, et le plus considérable pour $x^m(1-x)^n$. Le premier ne peut jamais être nul, tant que l'un des nombres $m$, $n$ n'est pas nul. Quant au plus grand terme, on trouve par le calcul différentiel qu'il répond à $x=\frac{m}{m+n}$, c'est-à-dire que cette valeur, d'où il suit $1-x=\frac{n}{m+n}$, rend le produit $x^m(1-x)^n$ plus grand que toute autre valeur qu'on voudrait assigner à $x$. Ce résultat

est bien remarquable, puisqu'il nous apprend que la plus probable de toutes ces hypothèses est celle où les probabilités simples des événemens $A$ et $B$ sont égales au rapport du nombre de fois que chacun de ces événemens est arrivé, avec leur nombre total : il rentre d'ailleurs dans la proposition du n° 27, quoiqu'il soit appuyé sur des considérations beaucoup plus générales.

93. *Cette même hypothèse, outre qu'elle jouit de la plus grande probabilité relative, peut encore être regardée comme s'approchant sans cesse de la véritable probabilité, à mesure que le nombre des observations devient plus considérable*, c'est-à-dire qu'en assignant à ce nombre une augmentation convenable, on peut obtenir une probabilité aussi voisine de l'unité qu'on voudra, que la véritable valeur de $x$ sera comprise entre

$$\frac{m}{m+n}+c \quad \text{et} \quad \frac{m}{m+n}-c,$$

la quantité $c$ étant aussi petite qu'on voudra. L'expression de cette probabilité, se composant de la somme des probabilités correspondantes aux diverses valeurs que l'on peut assigner à $x$ entre les limites indiquées ci-dessus, sera évidemment

$$\frac{S^{(m,n)}-S_a^{(m,n)}}{S_1^{(m,n)}} \ (83),$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{m}{m+n}-c=a, \qquad \frac{m}{m+n}+c=b;$$

mais comme on y suppose que $m$ et $n$ sont de très-

grands nombres, il faut, pour en trouver la valeur, faire usage des formules approximatives et du calcul intégral (*Voyez* note III.); c'est pourquoi la démonstration de la proposition énoncée au commencement de cet article ne saurait trouver place ici; je ferai seulement remarquer que cette proposition est analogue à celle du n° 28, et appuie sur les considérations très-générales qui servent à la détermination des probabilités *à posteriori*, le théorème fondamental que Jacques Bernoulli n'avait prouvé que dans l'ordre des probabilités déterminées *à priori*.

94. On voit aussi, par ce qui précède, que si la probabilité d'une hypothèse en particulier, est inassignable, celle d'un ensemble d'hypothèses comprises entre des limites dont la différence est finie, a une valeur finie, puisque telle est celle de l'expression

$$\frac{S_b^{(m,n)} - S_a^{(m,n)}}{S_1^{(m,n)}},$$

dans tous les cas où $b - a$ est une quantité finie: cette remarque est bien importante. Quand, par exemple, on observe une supériorité constante dans le nombre de fois qu'un événement se montre, sur le nombre de fois où se montre l'événement contraire, on est porté à croire que la production du premier est d'une facilité plus grande que celle du second, ou qu'il y a une cause qui détermine plutôt l'une que l'autre, ou enfin, ce qui est encore la même chose, que la probabilité simple du premier événement surpasse $\frac{1}{2}$. Mais cette croyance, qui n'est d'abord qu'un simple aperçu, se fortifiant à mesure que les événemens se reproduisent dans le même ordre de fréquence, est susceptible d'être appréciée, en déterminant, d'après le nombre des ob-

servations, la probabilité que la valeur de $x$ est comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1, ce qui se fait par le moyen de l'expression

$$\frac{S_1^{(m,n)} - S_{\frac{1}{2}}^{(m,n)}}{S_1^{(m,n)}} = 1 - \frac{S_{\frac{1}{2}}^{(m,n)}}{S_1^{(m,n)}}.$$

95. Ces formules ont une application très-curieuse, par rapport aux naissances. Arbuthnot ayant remarqué sur les listes des naissances arrivées à Londres depuis 1629 jusqu'à 1710, que le nombre de celles des garçons s'écartait peu du nombre de celles des filles, et pensant apparemment qu'il ne pouvait pas exister de loi primordiale qui maintînt ces nombres entre des limites peu différentes de l'égalité, voulut voir dans cette prétendue égalité un miracle continuel. Nicolas Bernoulli, au contraire, frappé des différences assez sensibles qui se trouvaient entre ces nombres, et de ce qu'il y avait toujours plus de garçons que de filles, y vit avec raison l'indice d'une plus grande possibilité dans la naissance des enfans du sexe masculin que dans celle des enfans de l'autre sexe, le rapport du nombre des unes au nombre des autres étant $\frac{18}{17}$ (*). Pour le prouver, il montra qu'en supposant un dé à 35 faces, 18 noires et 17 blanches, jeté 14000 fois, il y aurait une probabilité supérieure à $\frac{43}{44}$, que le nombre des faces noires amenées ne s'écarterait pas au-de là de 163, soit en plus, soit en moins, du nombre 7200, égal aux $\frac{18}{35}$ de celui des jets; il n'était donc pas surprenant que sur 14000 naissances, le nombre de celles de chaque sexe ne différât pas davantage de la proportion assignée par la probabilité simple, savoir, 7200 garçons et 6800 filles. Le fait s'étant soutenu, a été constaté de nouveau dans la

(*) *Analyse des Jeux de hasard*, par Montmort, pag. 388.

plupart des états de l'Europe. Daniel Bernoulli s'en est occupé (*), et enfin M. Laplace l'a traité par les formules directes, celles de l'article précédent.

De 1745 à 1784, les registres des naissances de Paris donnent 393386 garçons, 377555 filles, nombres dont le rapport est à peu près $\frac{25}{24}$, moindre que $\frac{19}{18}$ qu'on trouve par les registres de Londres, depuis 1664 jusqu'à 1758 inclusivement, et que $\frac{22}{21}$ donné par ceux du royaume de Naples (non compris la Sicile), depuis 1774 jusqu'à 1781 inclusivement aussi. Cependant, par les deux premiers nombres, les formules approximatives ont donné à M. Laplace, pour la probabilité que $x$ surpasse $\frac{1}{2}$, l'unité moins une fraction dans laquelle l'unité est divisée par un nombre de 72 chiffres (**). Un petit excès dans le nombre des répétitions d'un événement, sur celui des répétitions de l'événement contradictoire, a donc suffi, par sa constance, pour faire croître avec une immense rapidité la probabilité qui assigne une facilité plus grande au premier qu'au second; et plus les observations se multiplieront, en conservant les mêmes relations de grandeur, plus cette probabilité augmentera.

96. La formule du n° 93 se simplifie beaucoup, lorsqu'il n'est arrivé que des événemens d'une seule espèce. Dans ce cas, $S_{\frac{1}{2}}^{(m,\,n)}$ devient

$$S_{\frac{1}{2}}^{(m)}=\frac{1}{(m+1)2^{m+1}}, \quad \text{et} \quad S_{1}^{(m,\,n)}=\frac{1}{m+1} \ (83);$$

on a donc

(*) *Novi Comment. Acad. Petrop.*, t. XIV, pars 1ª, et t. XV.

(**) *Théorie analytique des Probabilités*, p. 379.

$$1 - \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{2^{m+1} - 1}{2^{m+1}}$$

pour la probabilité que celle de l'événement constamment observé est supérieure à $\frac{1}{2}$.

On peut d'abord appliquer ceci à l'un des phénomènes les plus remarquables du système du monde, le sens uniforme dans lequel les planètes principales et leurs satellites font leurs révolutions autour du soleil. En regardant le mouvement de chacun de ces corps comme le renouvellement du même fait, la répétition de ce fait indique une cause qui a déterminé la direction d'orient en occident, préférablement à la direction contraire. Si l'on n'applique le calcul qu'aux planètes principales, afin de n'y faire entrer que des circonstances rigoureusement semblables, on prendra $m = 11$, et il viendra

$$\frac{2^{12} - 1}{2^{12}} = \frac{4095}{4096},$$

pour la probabilité de l'existence d'une plus grande facilité de ce mouvement d'orient en occident, que dans le sens contraire. On aurait eu un résultat beaucoup plus fort, en joignant aux planètes principales les satellites connus, qui sont maintenant au nombre de 18, et un résultat encore bien autrement près de l'unité, si l'on eût regardé comme dépendant de la même cause le sens uniforme dans lequel s'exécutent les rotations observées dans plusieurs de ces corps.

Quelques auteurs ont évalué cette probabilité d'une manière un peu différente, en partant d'ailleurs du principe posé dans le n° 80; mais en se bornant à comparer le cas où il existerait une cause absolue, avec celui où les deux directions opposées seraient égale-

ment possibles, ce qui réduit les hypothèses à deux, donnant pour l'événement arrivé, l'une, la certitude représentée par l'unité, et l'autre, la probabilité $\frac{1}{2^{11}}$. La probabilité de la première hypothèse serait donc alors

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2^{11}}} = \frac{2^{11}}{2^{11}+1} = \frac{2047}{2048},$$

si l'on ne faisait entrer dans le calcul que les planètes principales. Cette dernière fraction est moindre que la précédente ; mais je crois que les considérations dont elle est déduite sont trop particulières. En ne s'attachant qu'à la direction du mouvement, on ne trouve il est vrai que deux chances ; mais doit-on les supposer également possibles, quand on ignore complètement de quelle manière le mouvement a été imprimé ; et ne se peut-il pas qu'au lieu d'être un effet simple, sa direction soit le résultat du concours de diverses chances qu'il faut supposer, par conséquent, dans tous les rapports possibles avec celles qui auraient donné la direction contraire ?

Les limites étroites dans lesquelles sont renfermées les inclinaisons des orbites des planètes anciennement connues, qui n'occupent dans le ciel qu'une zone d'environ 18 degrés de largeur, fournissent aussi une grande probabilité pour attribuer tous les mouvemens de ces corps à une cause unique ; mais la découverte de la planète Pallas, dont l'orbite est inclinée de plus de 34 degrés par rapport à l'écliptique, doit modifier un peu cette probabilité, que changerait encore la découverte de corps qui, s'écartant davantage de l'écliptique et parcourant des orbites plus excentriques, formeraient le passage des planètes aux comètes, dont les mouvemens ont lieu dans tous les sens et sous toutes les inclinaisons.

97. La formule employée dans l'article précédent trouve aussi son application dans une question agitée par les philosophes des siècles passés et du nôtre, celle de la liaison des effets aux causes. Les uns, comme Hume, ont nié que nous eussions aucun motif solide pour supposer une dépendance entre deux effets qui se suivent ou s'accompagnent constamment. Les autres, importunés par ce scepticisme dont les conséquences devraient s'étendre sur nos actions les plus fréquentes et les plus nécessaires, ont affirmé qu'un sentiment intime, une loi de notre organisation intellectuelle, nous forçait de rapporter chaque effet à une cause que nous trouvions toujours dans celui qui précédait. D'autres enfin, craignant de trop multiplier ces lois de l'intelligence, ces faits primitifs qui ressemblent assez aux idées innées, ont pensé que la considération des divers degrés de probabilité, non-seulement expliquait le phénomène moral, mais pouvait donner la mesure de la confiance que nous attachons ou que nous devrions attacher à nos connaissances. Ils ont évité ainsi de tomber dans le pyrrhonisme et le dogmatisme absolus, doctrines également absurdes, mais dont la seconde, qui a tant de fois servi l'avidité et l'ambition de certains hommes, et qui flatte la paresse de tous, est infiniment plus dangereuse que la première, toujours renfermée dans les bornes de la spéculation, puisqu'après la dispute la plus animée sur l'existence des corps, le plus déterminé pyrrhonien n'entreprendra pas de sortir de sa chambre à travers la muraille.

Cette doctrine moyenne, que l'on pourrait nommer *scepticisme gradué*, proposée d'abord par Helvétius (*), a été fortement recommandée par Condorcet, comme

(*) Dans une note du 1er chapitre du 1er Discours de l'*Esprit*.

la seule qui pût échapper à toutes les difficultés, parce qu'elle reposait entièrement sur l'expérience, d'où toutes nos idées tirent leur origine; il y est revenu souvent dans ses ouvrages, mais Mendelshon paraît avoir, le premier, appliqué spécialement la probabilité à la liaison des effets aux causes, dans un Traité sur l'évidence, couronné, en 1763, par l'Académie de Berlin. Voici comme il raisonne.

« Si nous avons expérimenté une seule fois que » deux faits, *A* et *B*, se suivent immédiatement, il » se présente pour nous trois suppositions : ou que *A* » ait son fondement en *B*, ou que *A* et *B* aient leur » fondement commun dans une troisième cause *C*, ou » que chacun des deux dépende enfin d'une cause iso- » lée ou indépendante. Dans les deux premiers cas, » ils devront reparaître toujours à la suite l'un de » l'autre; dans le troisième..., leur rencontre sera l'effet » du hasard : ils pourront se trouver aussi bien séparés, » éloignés, que réunis... (*). » On voit déjà qu'en admettant l'influence de la répétition du jugement de possibilité sur notre esprit, (5 et 6), il doit être porté à supposer une liaison, soit immédiate, soit médiate, entre *A* et *B*. « Donc, s'ils se reproduisent de nouveau; » si, en se reproduisant, ils paraissent constamment » réunis, il devient vraisemblable que cette réunion » a son principe dans l'une des deux premières hypo- » thèses. Plus la répétition aura été fréquente, la ren- » contre des deux faits étant constante, plus cette vrai- » semblance augmentera; elle ira croissant ainsi jusqu'à » l'infini. » Voyons comment le calcul justifie cette dernière assertion.

98. On a observé un grand nombre de fois de suite l'ap-

(*) *Histoire comparée des systèmes de philosophie*, par M. Degerando, t. II, pag. 151 et suiv.

parition consécutive ou simultanée des faits *A* et *B*; la probabilité que cette apparition jouit d'une grande possibilité, s'obtiendra en cherchant la probabilité de l'hypothèse par laquelle le rapport des chances qui établissent le concours de l'un avec l'autre, diffère très-peu de l'unité; et pour rendre la chose plus sensible; on peut, ce me semble, énoncer ainsi la question : *On a tiré d'une urne* (avec l'attention de les y remettre chaque fois) *un grand nombre de billets marqués* AB; *s'il n'y en avait que de cette sorte, l'apparition simultanée des lettres* A et B *serait nécessaire; mais c'est ce qu'on ignorera tant que tous les billets ne seront pas tirés: on demande donc quelle est la probabilité que le rapport du nombre des billets de l'espèce de ceux qui sont sortis, au nombre total des billets, est compris entre des limites données?*

Soit *m* le nombre des billets, *a* une fraction assez voisine de l'unité; la probabilité que le rapport inconnu tombe entre *a* et 1, aura pour expression

$$\frac{S_1^{(m)} - S_a^{(m)}}{S_1^{(m)}} = 1 - \frac{S_a^{(m)}}{S_1^{(m)}} \quad (93),$$

et nommant *P* cette probabilité, il viendra

$$P = 1 - a^{m+1} \quad (83).$$

$a$ étant $< 1$, la valeur de $a^{m+1}$ pourra être rendue aussi petite qu'on voudra; son décroissement qui ne sera pas d'abord très-rapide, si *a* diffère peu de l'unité, le deviendra dès que le nombre *m* sera très-considérable. Soit, par exemple,

$$a = \frac{1\,000\,000}{1\,000\,001},$$

et qu'on l'élève à la 100 000 000^e puissance, on trouvera

facilement, par le moyen des logarithmes, que cette puissance est égale à l'unité divisée par un nombre de 44 chiffres; et comme c'est la probabilité contraire à celle qu'on cherche, on jugera par là combien cette dernière approche de l'unité.

Si l'on se donne $P$ et qu'on prenne $a$ pour inconnue, on obtiendra $a = \sqrt[m+1]{1-P}$. En faisant seulement $P = \frac{1}{2}$, $m$ étant toujours 100 000 000, on trouvera

$$a = 0,9999999993,$$

environ, fraction qui diffère bien peu de l'unité; et ce rapport du nombre des billets marqués $AB$ au nombre total, sera la limite qui sépare les rapports probables, de ceux qui ne le sont pas (9); en sorte que celui qui est un peu moindre sera déjà probable (*).

Ces résultats peuvent donner une idée de ce que doit être, quand on l'étend à la suite des siècles connus et à toute la terre, l'expression numérique de la

---

(*) Si on n'a pas de Tables de logarithmes assez étendues pour effectuer ce calcul, on peut employer la formule

$$a^x = 1 + \frac{x}{1}\frac{\text{l}a}{\text{l}e} + \frac{x^2}{1.2}\left(\frac{\text{l}a}{\text{l}e}\right)^2 + \text{etc.},$$

(*Compl. des Élém. d'Algèb.*)

dans laquelle $\text{l}e = 0,43429$; il faudra y changer $a$ en $1-P$ et $x$ en $\frac{1}{m+1}$; et quand le nombre $m+1$ sera très-grand, les deux premiers termes suffiront. Dans l'exemple ci-dessus, où $1-P = \frac{1}{2}$, on aura

$$2^{-\frac{1}{m+1}} = 1 - \frac{1}{m+1}\cdot\frac{30}{43} = 1 - \frac{1}{100\,000\,001}\,\frac{3}{4},$$

environ.

probabilité de la dépendance de phénomènes tels que la rencontre des corps et le déplacement qui en est la suite, si prodigieusement répétés dans un seul jour et dans un seul lieu.

La probabilité qu'il y a très-peu de chances contraires à la permanence du mouvement de la terre, déjà très-considérable quand elle est conclue du nombre de levers et de couchers du soleil, comptés depuis les tems les plus reculés, devient bien plus forte encore quand on a égard aux lois connues des mouvemens de notre globe, parce qu'alors la conformité des positions observées, avec les positions calculées, doit être regardée comme fournissant de nouveaux faits, dont le nombre est presqu'infini.

Il s'en faut de beaucoup sans doute que les faits soient aussi multipliés, par rapport à d'autres liaisons regardées comme des lois de la nature; ni que la plupart de nos inductions soient établies sur de tels fondemens; mais il faut bien prendre garde à l'influence qu'exercent les faits les plus répétés, par rapport à ceux qui le sont moins. Dès que les premiers nous ont fait acquérir le sentiment de la constance des lois de la nature, nous l'étendons à tout ce qui se passe sous nos yeux; et pour tous les cas avec lesquels nous sommes familiarisés, notre confiance dans la liaison des effets aux causes, passant en habitude, peut encore croître, par cette raison, beaucoup plus rapidement que la probabilité indiquée par les calculs précédens.

De plus, le but essentiel de nos observations étant de prévoir ce qui doit arriver, la probabilité de la production d'un nouvel événement semblable à ceux qui ont déjà été observés, est celle qui nous intéresse le plus, parce qu'elle peut servir à régler notre conduite; or, pour celle-ci, le calcul prend une marche beaucoup plus

rapide ; car l'expression $\frac{m+1}{m+2}$ (86) diffère bien peu de l'unité, lorsque $m$ est un peu grand. Cette proposition, *le soleil se levera demain*, par exemple, en prenant pour point de départ une époque reculée de 6000 ans, a maintenant une probabilité égale à $\frac{2\,191\,501}{2\,191\,502}$. Si l'on embrasse un intervalle de plus d'un jour, la probabilité, donnée alors par la formule $\frac{m+1}{m+p+1}$, va sans cesse en décroissant et peut devenir très-faible ; mais cette conséquence n'a rien qui choque la raison, puisque l'avenir peut développer des lois qui nous sont encore inconnues (*).

---

(*) Bertrand, de Genève (*Développemens nouveaux de la partie élémentaire des Mathématiques*, t. I, page 418), a traité aussi la question précédente, mais par la considération des probabilités *à priori* seulement ; et il a pris pour la probabilité simple de l'événement observé, celle qui donnait $\frac{1}{2}$ pour la probabilité de la répétition de cet événement $m$ fois de suite, parce que l'hypothèse de *cette probabilité ne favorise ni ne défavorise* la production de la série d'événemens observés. Suivant ce mode, on a

$$x^m = \frac{1}{2}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{1}{\sqrt[m]{2}};$$

et comme, par cette expression, plus $m$ augmente, plus $x$ approche de l'unité, plus aussi on doit s'attendre à l'apparition d'un événement pareil à ceux qui ont déjà eu lieu.

La formule de la note précédente, donnerait, dans le cas de $m$ un peu grand,

$$x = 1 - \frac{1}{m}\cdot\frac{3}{4} = \frac{m - \frac{3}{4}}{m},$$

ce qui ne diffère pas beaucoup de $\frac{m+1}{m+2}$ ; mais Bertrand n'a considéré qu'une seule hypothèse, au lieu que la méthode directe les embrasse toutes.

99. On ne manque donc point de motifs suffisans pour appuyer la légitimité des conclusions du passé à l'avenir; et c'est en cela que consiste le pouvoir de l'analogie; mais n'est-il pas arrivé qu'en se livrant trop à ce pouvoir, les savans, aussi bien que le vulgaire, soient tombés dans l'erreur, et aient hasardé des assertions prématurées? Cependant ils ne pouvaient suivre d'autre voie pour découvrir la vérité. Que l'on examine avec attention, soit les règles de Descartes, soit celles de Newton, rapportées dans la note de la page 2, y verra-t-on autre chose que le soin de faire l'énumération la plus exacte possible des faces d'une idée ou des combinaisons de plusieurs faits? Lorsque l'énumération sera complète, que la dépendance, se trouvant la même dans tous les cas, sera nécessaire, il y aura certitude, soit physique, soit intellectuelle, au moins pour chaque partie indivisible du raisonnement, ou chaque fait en particulier (1 et 2). Hors de là, on ne peut plus que balancer les cas favorables à l'analogie avec les cas contraires; et s'il ne s'en présente pas d'abord de cette dernière espèce, rien ne garantit qu'il n'en arrivera point. L'hypothèse qui explique complètement un grand nombre de faits n'est encore que probable, et le calcul apprécie le degré de confiance qu'elle mérite: mais tant que les faits ne seront pas tous observés, tous mesurés avec la plus grande précision, aucune hypothèse ne se changera en véritable théorie; les plus heureuses ne seront que des méthodes artificielles, pour lier par une seule formule, ou comprendre dans une seule expression, la dépendance d'un nombre de faits plus ou moins grand.

100. Tels étaient les principes d'après lesquels Condorcet, plaçant la certitude absolue seulement dans la *conscience* d'une sensation actuelle, et dans la

*perception* instantanée et avec pleine évidence de la convenance ou de la disconvenance de deux idées, donnait pour fondement au reste de nos connaissances notre tendance générale à croire au retour des faits que nous avons observés plusieurs fois sur nous ou sur les autres objets (1 et 2), et faisait deux classes de probabilités, la première comprenant celles dont la différence avec l'unité est inassignable, mais tellement petite, qu'il serait superflu de la calculer, et auxquelles nous acquiesçons par une habitude dont nous ne nous rendons pas compte, comme nous le faisons, ou du moins comme nous devrions toujours le faire pour les probabilités de la seconde classe (*). Ainsi s'établit une gradation non interrompue, depuis les propositions qui n'admettent aucun doute, jusqu'aux plus incertaines. Cette manière d'envisager nos connaissances donne une base solide au scepticisme « qui, dans les écoles » grecques, avait dégénéré en un ridicule charlata- » nisme; mais qui, chez les modernes, dégagé de ces sub- » tilités pédantesques, est devenu la véritable philo- » sophie, et qui consiste, non à douter de tout, mais » à peser toutes les preuves, en les soumettant à une » rigoureuse analyse; non à prouver que l'homme ne » peut rien connaître, mais à bien distinguer et à » choisir pour objet de sa curiosité ce qu'il est pos- » sible de savoir (**). »

(*) A la tête des probabilités de la première classe se trouve celle qui fonde notre croyance à l'existence des corps, ou notre « per- » suasion que le système des sensations qui sont excitées en nous » dans un instant, se représentera constamment de même dans » des circonstances semblables, ou avec de certaines différences » liées constamment au changement des circonstances. » (*Essai sur l'application de l'Analyse à la Probabilité*, etc. Discours préliminaire, page xij.)

(**) *Eloge de Franklin. OEuvres de Condorcet*, tome IV, p. 91.

101. La théorie mathématique concourant avec les simples aperçus du bon sens et avec les résultats de l'expérience, à prouver que les lois de la nature peuvent se reconnaître, au moins à la longue, dans la succession des faits qui en sont les conséquences nécessaires; il s'ensuit que dans les questions dont les élémens sont trop compliqués pour en épuiser les combinaisons, en parcourir tout l'enchaînement, il faut interroger la nature, compter et comparer les faits, enfin juger *à posteriori* de ce qu'il est impossible de prévoir. Telle est la base et le motif de l'application du calcul des probabilités aux sciences physiques, morales et politiques.

Cette application conduira toujours à des résultats utiles, ou maintiendra dans ce doute salutaire, qui prévient les erreurs dangereuses, lorsqu'on la fera avec circonspection, c'est-à-dire en distinguant avec soin les faits, d'après les diverses circonstances qu'ils présentent, afin d'éviter de rapporter à toutes ce qui ne convient qu'à quelques-unes, de confondre les points de vue qui doivent être séparés, et de rendre générales des conclusions qui ne sont vraies qu'entre certaines limites. Ce sont là les reproches que l'on peut faire quelquefois avec raison à des calculs très-savans, mais dans les résultats desquels on ne trouve pas une grande évidence, ni une utilité bien prochaine. Mais que l'on y prenne garde; c'est parce que, faute de données, on a été obligé de les appuyer sur des suppositions souvent très-détournées, que leur marche est devenue si compliquée, et leur résultat si incertain. Un nombre suffisant d'observations dégagées de toutes les circonstances étrangères aux conséquences qu'on cherche, offrira toujours un moyen aussi simple que sûr de découvrir ces conséquences, ou d'en me-

surer l'étendue et la valeur, et par conséquent d'apprécier les combinaisons qui les ont amenées.

De simples registres, fidèlement tenus, suffiraient pour reconnaître l'effet d'un impôt, par les variations qu'il produit dans les salaires et les consommations; celui des réglemens commerciaux, par le mouvement des importations, des exportations, le progrès des manufactures, la culture des terres.

On peut juger aussi d'un système d'instruction, par le recensement des sujets qu'il aura produits après un certain nombre d'années; d'un système de législation civile, par le nombre de procès qu'il aura engendrés ou prévenus; d'une législation criminelle, par le nombre des coupables condamnés ou absous et repris. Mais pour qu'on puisse tirer parti de ces observations, il faut que l'épreuve du système soit continuée, que les résultats en soient recueillis avec impartialité, pour être comptés avec exactitude. Je dis *comptés;* car lorsqu'on n'en vient pas là, on tombe presque toujours dans des déclamations vagues. Il n'y a pas de mesure de gouvernement qui ne lèse un assez grand nombre d'intérêts particuliers; et si les personnes qu'elle attaque ont du crédit, savent parler ou faire parler pour eux, la mesure la plus utile à la masse générale de la nation ne peut pas subsister; quelques inconvéniens relevés avec force ou avec adresse la font révoquer, tandis qu'une énumération exacte de ses effets aurait rendu incontestable la supériorité de ses avantages sur ses inconvéniens. En s'écartant de ce procédé, on a pu même l'attaquer de bonne foi.

Pour donner un exemple de ces jugemens vagues qu'on porte par de simples aperçus, sur des objets susceptibles d'une évaluation précise, je rapporterai le beau résultat obtenu par M. Duvillard, dans son *Ana-*

*lyse de l'influence de la petite vérole sur la mortalité*, (p. 10). Il a démontré, d'après les Tables de mortalité, à Genève, à La Haye et à Berlin, que *passé l'âge de 30 ans, la petite vérole est d'autant moins dangereuse pour ceux qui ne l'ont pas encore eue, qu'ils sont dans un âge plus avancé*. L'opinion commune est contraire à ce résultat, et il est aisé de sentir comment elle a pu s'établir avant qu'on ait fait l'observation exacte du nombre des morts causées par la petite vérole contractée à différens âges. On a été d'autant plus frappé de ces morts, qu'elles sont arrivées plus loin de l'époque ordinaire de la maladie. L'importance, pour la société, des personnes qu'elle lui enlevait, et un danger qu'on était porté à regarder comme particulier à la jeunesse, ont beaucoup agi sur l'imagination des spectateurs; alors des impressions purement morales sont venues se mêler à un jugement où ne devait entrer que le calcul. Ce qui est arrivé ici a encore bien plus de force dans toutes les circonstances où les intérêts et les passions sont fortement agités : aussi n'est-ce encore que dans ce qui regarde la mortalité des individus, et leur multiplication, qu'on a recueilli les faits avec quelque suite; c'est donc dans ces faits qu'un grand nombre des auteurs qui ont écrit sur l'économie politique, a cherché la mesure pour évaluer le mérite des systèmes divers d'administration et de gouvernement : et par cette raison, je donnerai, avec quelque détail, la manière d'y appliquer le calcul des probabilités.

*Détermination des probabilités de la vie humaine.*

102. La formation des Tables de mortalité serait très-simple, si l'on pouvait trouver sur les registres des décès, ceux d'un grand nombre d'individus choisis sur

les registres des naissances, et par ce moyen déterminant combien il en reste à la fin de chaque année, de leur âge (*). Mais ce moyen est rarement praticable; car les résultats de ce genre ne pouvant mériter quelque confiance qu'autant qu'ils sont déduits d'un grand nombre de faits, si l'on s'attache à un lieu d'une faible population, il faudra dépouiller les registres d'une longue suite d'années, pour suppléer à la quantité de naissances simultanées que peut fournir une ville considérable; mais dans l'un et l'autre cas, qui est-ce qui oserait entreprendre de suivre chaque individu à travers les changemens de domicile, les migrations, l'imperfection même des registres, et la foule des noms répétés, qui seule pourrait occasionner très-souvent beaucoup de confusion? Et puis, comme on le verra bientôt, et comme il est facile de le prévoir, le tems influe sur les probabilités de la vie humaine, soit par les changemens politiques, soit par le perfectionnement qu'apporte dans le régime et la police civile le progrès des lumières : les Tables formées sur des observations qui embrassent un trop grand intervalle de tems ne sauraient donc convenir ni à l'époque où remontent les premières, ni à l'époque présente. Voilà bien des difficultés qui rendent la méthode indiquée ci-dessus à peu près impossible à suivre, excepté dans quelques cas particuliers dont il sera fait mention plus loin; et aussi est-ce d'une toute autre manière que la chose s'est faite.

La plus ancienne Table de mortalité que l'on connaisse est celle que Halley a déduite des registres de la ville de Breslaw en Silésie, et qu'il a publiée dans

(*) *Théorie analytique des Probabilités*, pag. 388.

les *Transactions philosophiques*, en 1693. Il fit choix de cette ville, parce que le nombre des naissances et celui des morts y différant très-peu, il pensait que la population s'y maintenait à peu près dans un état stationnaire, et qu'en conséquence les pertes qu'elle faisait en individus dans les divers âges, étaient sensiblement proportionnelles à la mortalité, pour chacun de ces âges, ce qui faisait qu'on pouvait regarder les individus décédés chaque année, comme s'ils fussent tous nés la même année, et leurs âges respectifs comme indiquant la manière dont s'éteindrait successivement un pareil nombre d'individus ayant commencé leur vie simultanément. Halley réunit donc le nombre des morts arrivées depuis 1687 jusqu'en 1691, à Breslaw, distribua ce nombre suivant les âges; alors retranchant du premier nombre celui des enfans morts à 1 an, le reste indiqua le nombre des survivans, desquels il retrancha ensuite le nombre des enfans morts à 2 ans, pour obtenir celui des survivans, et ainsi de suite; et afin de faciliter les calculs, il réduisit ces divers nombres proportionnellement à 1000, par lequel il représenta celui des enfaans de 1 an.

La commodité de ce procédé supplée bien à ce qui lui manque du côté de l'exactitude, parce qu'on en peut répéter fréquemment l'application, et, compensant par la variété des lieux et des époques, les erreurs auxquelles il est sujet, arriver à des valeurs moyennes suffisamment approchées pour présenter des résultats intéressans. Smart en a fait usage pour la ville de Londres; Dupré de Saint-Maur, pour celle de Paris, et il a été appliqué à presque toutes les capitales et à beaucoup d'autres lieux. Mais dans plusieurs Tables, dans celles de Dupré de Saint-Maur, par exemple, il s'est glissé d'assez grandes inexactitudes, parce que l'âge est très-

souvent fautif dans les actes de décès; les personnes qui l'indiquent, ou le savent mal, ou ne donnent que le nombre rond le plus approchant; aussi on trouve souvent 60 ans où il aurait fallu 59 ou 58, et de là résultent dans le premier de ces âges plus de décès en apparence qu'il n'y en a eu réellement. Cette inexactitude est aisée à remarquer, par la marche trop inégale des nombres, qui doivent se succéder dans la Table; et il faut tâcher de les corriger de la manière la plus vraisemblable, en régularisant les différences; c'est ce qu'a fait Saint-Cyran, pour les Tables de Dupré de Saint-Maur (*).

Le concours de circonstances nécessaire pour pouvoir suivre les individus un à un, n'a jusqu'à présent eu lieu que par rapport à quelques classes dont l'ordre de mortalité est très-différent de celui de l'universalité des hommes: telle était la classe des rentiers viagers de Hollande, dont Kerseboom a dressé la Table de mortalité, celle des rentiers viagers de France, connus sous la dénomination de *tontiniers*, et celle des religieux de l'ordre des Bénédictins, dont les Tables sont l'ouvrage de Deparcieux, etc. L'intérêt du gouvernement, l'ordre établi dans une congrégation d'hommes studieux, donnaient aux registres de ces classes une exactitude et une clarté qui en facilitaient beaucoup le dépouillement; mais aussi les résultats devaient être fort éloignés de ceux de la vie ordinaire. Ce n'est que sur des enfans paraissant bien constitués, et en général sur des adultes bien portans, que l'on place en rente viagère. Ceux qui jouissent d'un pareil revenu tiennent pour la plupart une conduite uniforme et modérée, qui doit prolonger

(*) Voyez ses *Recherches sur les Rentes viagères*. 2e part., p. 23.

leur existence; beaucoup sont célibataires : les religieux l'étaient tous et n'entraient dans leur profession qu'après être échappés aux dangers de l'enfance et de l'adolescence. Des Tables calculées sur de pareils individus ne sauraient donc servir que pour ceux qui sont placés dans les mêmes circonstances; c'est ce qu'on verra lorsque j'exposerai la théorie des rentes viagères. Les questions dont je vais d'abord m'occuper sont seulement relatives à la vie considérée en elle-même, et à la population, en supposant que les événemens futurs se succèdent comme les événemens passés, ce qui est permis, puisqu'on regarde le nombre de ceux-ci comme très-grand par rapport à celui des autres.

103. La plus simple de ces questions est la recherche des probabilités de la prolongation de la vie à chaque âge. Par exemple, la probabilité de vivre encore 10 ans, lorsqu'on est parvenu à l'âge de 40, s'obtient en divisant par le nombre des personnes de cet âge, le nombre des personnes de 50. La Table de la *Loi de la mortalité en France*, insérée dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*, donnant pour l'un de ces nombres 369 404, et pour l'autre 297 070, il en résulte $\frac{297}{369} = 0{,}805$ environ; la Table dressée sur les registres de Londres, par Price, donne $\frac{224}{322} = 0{,}696$; celle de Vienne, par Sussmilch, $\frac{220}{298} = 0{,}738$; celle de Berlin, par le même, $\frac{224}{300} = 0{,}747$; enfin, celle des campagnes, en Suisse, par Muret, $\frac{431}{506} = 0{,}852$, probabilité plus forte que les précédentes.

104. On cherche encore quelle est la durée de la *vie probable*, à un âge donné; on entend par cette durée le nombre d'années après lequel la probabilité d'exister et celle de ne pas exister sont les mêmes, et par conséquent égales à $\frac{1}{2}$. Il est évident que cela a lieu lorsque le nombre des personnes de l'âge dont on part est réduit à la moitié de ce qu'il était. Si l'on cherche ce terme, à compter de la naissance, on trouvera par les Tables de Dupré de Saint-Maur, qu'à Paris il tombe entre 8 et 9 ans; à Londres, un peu avant 3 ans; à Vienne, un peu avant 2; un peu après, à Berlin; mais que ce terme est bien plus éloigné dans les campagnes. La Table de l'*Annuaire*, moyenne pour toute la France, le place entre 20 et 21 ans; celle d'Angleterre, entre 27 et 28 ans; celle du Brandebourg, entre 25 et 26; celle de Suisse, à 41 ans, Cette prodigieuse différence entre les campagnes et la ville, ne saurait être attribuée qu'aux suites de l'extrême misère, à la malpropreté, au resserrement des demeures et à l'insalubrité qui en est la conséquence, dans les capitales. A Montpellier, ville dont la population est d'environ 32000 individus, et dont on regarde le séjour comme très-sain, le terme dont il s'agit n'est cependant placé que vers 6 ans.

L'âge de 40 ans étant assez ordinairement celui où l'état d'un homme est fait, où il commence à jouir du fruit de ses premiers travaux, on peut être curieux de connaître la vie probable qui s'y rapporte. Les Tables citées précédemment donnent, à Paris, plus de 21 ans; en France, terme moyen, 23 ans; à Londres, 18; à Vienne, plus de 19; à Berlin, de même; en Suisse, près de 25.

La plupart de ces Tables ne s'étendent guère au-delà de 90 ans, que l'on doit regarder comme l'extrême

vieillesse, puisqu'il est très-rare, non-seulement de passer cet âge, mais de l'atteindre. Le rapport du nombre d'individus de cet âge, à celui des naissances, sera la mesure de la *longévité*, dans le lieu pour lequel la Table a été construite. La Table de l'*Annuaire* donne pour la France $\frac{38}{10000} = 0,0038$; celle de Londres, $\frac{3}{1518} = 0,0020$; celle de Vienne, $\frac{3}{1495} = 0,0020$; celle de Berlin, $\frac{6}{1427} = 0,0042$; et celle de Suisse, 0,0050; cette dernière probabilité, plus forte que les autres, est encore surpassée par celle qu'offre la Table calculée par Gorsuch, sur les registres de quelques paroisses de campagne, en Angleterre, et qui est de 0,0070.

On ne doit pas encore trop compter sur ces résultats, parce que le nombre des observations qui se rapportent aux derniers âges est très-petit. Les Tables de Kerseboom, dressées sur les décès des rentiers viagers de Hollande, et celles que Deparcieux a déduites des registres des tontines de France, quoique se rapportant à des classes d'individus choisis, ne s'étendent pas jusqu'à 100 ans; la première donne, pour l'âge de 90 ans, $\frac{10}{1400} = 0,0071$; la seconde, 0,0110 pour parvenir, de l'âge de 3 ans, à celui de 90.

Price dit que la probabilité de parvenir à 80 ans est $\frac{2}{43}$ dans le pays de Vaud, $\frac{2}{45}$ en Brandebourg, $\frac{1}{30}$ à Breslaw, $\frac{1}{37}$ à Berlin, $\frac{1}{40}$ à Londres, $\frac{1}{41}$ à Vienne (*).

105. Dans les Tables dont je viens de faire usage,

(*) Tom. Ier des *Mémoires présentés à l'Institut*, etc., pag. 75.

les sexes sont confondus ; cependant l'ordre de mortalité n'est pas le même pour tous deux; il varie encore, suivant les professions et d'autres circonstances dont on constaterait l'effet en séparant les décès en classes relatives à chacune de ces circonstances. C'est ce que l'on a commencé de faire, depuis qu'on a reconnu l'utilité de ce genre d'observations ; mais les données manquent très-souvent sur les actes de décès ; et quand on les y trouve, le travail du classement devient trop considérable, lorsqu'il faut le recommencer sous divers points de vue. On l'abrégerait beaucoup, si on faisait les relevés dans la forme ingénieuse imaginée par Condorcet, pour enregistrer des faits ou désigner des objets par une combinaison de caractères qui en indiquent les principales propriétés (*).

Quand on ne veut que saisir la marche des résultats, il est commode de substituer aux Tables des figures où les nombres soient représentés par des lignes ou des espaces ; ces signes naturels de la grandeur, la rendant sensible à l'œil, en peignent immédiatement les variations : telle est la propriété des *courbes de mortalité*. C'est ainsi qu'on nomme celles qui se construisent en élevant sur une ligne divisée en autant de parties égales qu'il y a d'années dans la plus longue vie, des perpendiculaires proportionnelles aux nombres d'individus existans à chaque âge.

106. Comme toute courbe continue peut être représentée par une équation, quelques géomètres ont cher-

---

(*) Voyez ses *Elémens du Calcul des Probabilités*, pag. 31. Si cette forme, dans l'explication de laquelle il n'a peut-être pas mis assez de clarté, eût été bien saisie et appliquée par quelque naturaliste, je ne doute pas qu'elle n'eût été bientôt adoptée, et qu'il n'en fût résulté beaucoup d'avantages, sans compter celui de l'extrême brièveté. C'est une espèce de dictionnaire où l'on peut trouver les mots par un assez grand nombre de clefs.

ché à obtenir celle des courbes de mortalité, en liant, par une formule algébrique, tous les nombres insérés dans une Table de mortalité. Lambert a trouvé que l'équation

$$y = 10000\left(\frac{96-x}{96}\right)^2 - 6176\left\{e^{-\frac{x}{31,682}} - e^{-\frac{x}{2,43114}}\right\}$$

représentait très-bien la Table construite sur les registres de Londres; et, par analogie, M. Duvillard a proposé d'employer en général l'équation

$$y = N\left(\frac{t-x}{t}\right)^2 - m\left\{e^{-\frac{x}{k}} - e^{-\frac{x}{n}}\right\},$$

dans laquelle $y$ désigne le nombre des individus de l'âge $x$, $N$ le nombre total des naissances, $t$ l'âge le plus avancé de la Table, $e$ la base des logarithmes népériens, $m$, $k$ et $n$ des constantes qu'on détermine pour chaque Table en particulier (*).

C'est dans les premières années que la marche des Tables paraît plus irrégulière; mais bientôt le nombre annuel des morts devient constant, pendant un intervalle de tems plus ou moins considérable. La Table de Breslaw, par exemple, donne 6 décès par an, depuis 12 ans jusqu'à 22, 7 de 22 à 29, etc., et pourrait ainsi se partager en progressions par différences. Moivre a trouvé que, sans trop s'écarter de la vérité, on pouvait n'établir qu'une seule progression depuis l'âge de 22 ans jusqu'à celui de 86, auquel il a placé le dernier terme de la vie, regardant les âges plus avancés comme des cas trop rares, pour qu'il soit nécessaire d'en tenir compte. Cette progression, ayant pour différence l'unité et se réduisant à zéro à 86 ans, donne pour les âges

(*) Voyez les *Beytrage*, etc. de Lambert, t. III, pag. 483, et les *Recherches sur les Emprunts*, par M. Duvillard, pag. 8, note.

précédens un nombre d'individus égal à l'excès de 86 ans sur chacun de ces âges, excès que Moivre appelle *complément de vie.* A l'âge de 50 ans, par exemple, le nombre des vivans est 36, la probabilité de vivre 1 an, $\frac{35}{36}$, et celle d'en vivre 10, $\frac{26}{36}$. De cette loi résulte la formule très-simple $y=86-x$ (*).

107. Après avoir considéré les questions qui se résolvent presqu'à vue, au moyen des Tables de mortalité, je passe à celles qui demandent plus de calcul. La première dont je m'occuperai est la recherche de la *vie moyenne.* L'idée paraît en être venue d'abord à Nicolas Bernoulli, en appliquant à la durée de la vie, la formule de l'espérance mathématique, admise pour l'évaluation pécuniaire des hasards (60 et 65) (**). Puisque chaque individu pris en particulier peut se flatter de parvenir à l'âge le plus avancé, l'espérance qu'il a sur toutes les années qui doivent s'écouler jusqu'à cet âge, se mesurera en multipliant leur nombre par la probabilité d'y arriver.

Je prendrai un exemple dans la Table dressée par Deparcieux. On y trouve qu'aux âges de

87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95

ans, il reste

29, 22, 16, 11, 7, 4, 2, 1, 0

individus; et à cause que les décès ont lieu à diverses époques de l'année, on prend le milieu de l'année pour leur époque commune. Dans cette hypothèse, la différence 7 entre les nombres d'individus existans à 87 et à 88 ans, indiquant ceux qui sont morts dans

(*) Voyez le *Treatise of annuities*, qui suit la *Doctrine of chances.*

(**) *Actorum eruditorum supplementa*, t. IV, pag. 159.

cette année, ne leur assigne que 6 mois ou une $\frac{1}{2}$ année de vie; et en continuant sur ce pied, on trouvera qu'aux durées

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2},\ \frac{11}{2},\ \frac{13}{2},\ \frac{15}{2}$$

années, répondent

$$7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 1$$

individus. Cela posé, l'un quelconque des 29 individus de l'âge de 87 ans pouvant se trouver dans l'un quelconque des groupes ci-dessus, aura pour atteindre les durées correspondantes, les probabilités

$$\frac{7}{29},\ \frac{6}{29},\ \frac{5}{29},\ \frac{4}{29},\ \frac{3}{29},\ \frac{2}{29},\ \frac{1}{29},\ \frac{1}{29};$$

multipliant donc ces fractions par les durées correspondantes, et ajoutant les produits, on aura $\frac{155}{2.29} =$ 2 ans 8 mois, pour l'espérance de vie, à l'âge de 87 ans.

La partie de l'opération ci-dessus, dans laquelle on multiplie d'abord les nombres 7, 6, etc. par les fractions correspondantes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, etc., et on ajoute les produits, revient évidemment à calculer la durée collective de l'existence des individus de chaque groupe; et en divisant le résultat $\frac{155}{2}$ par le nombre 29 des individus, on répartit également cette durée à chacun.

Si l'on substitue aux nombres 7, 6, etc., les expressions équivalentes 29—22, 22—16, etc., et qu'on ne fasse qu'indiquer les multiplications, par les durées $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, etc., la somme des produits sera repré-

sentée par

$$\frac{1}{2}(29-22)+\frac{3}{2}(22-16)+\frac{5}{2}(16-11)$$
$$+\frac{7}{2}(11-7)+\frac{9}{2}(7-4)+\frac{11}{2}(4-2)$$
$$+\frac{13}{2}(2-1)+\frac{15}{2}(1-0),$$

ce qui se réduit aisément à

$$\frac{1}{2}.29+22+16+11+7+4+3+2+1,$$

et il ne reste plus qu'à diviser par 29 la somme des termes, à partir de 22, nombre d'individus correspondant à 88 ans, puis ajouter $\frac{1}{2}$ au quotient.

Cette règle, indiquée par Deparcieux, est générale, ensorte que si $a, a', a'', a''', a''''$ désignent les nombres d'individus vivans à des âges consécutifs ($a''''$ étant le dernier de la Table), $V$ la vie moyenne, à partir de l'âge correspondant au premier nombre $a$, et $V'$, à partir de l'âge $a'$, on aura

$$V=\frac{1}{2}+\frac{a'+a''+a'''+a''''}{a},\quad V'=\frac{1}{2}+\frac{a''+a'''+a''''}{a'};$$

tirant de la seconde expression la valeur de $a''+a'''+a''''$, pour la substituer dans la première, il viendra

$$V=\frac{1}{2}+\frac{a'}{a}\left(V'+\frac{1}{2}\right),$$

formule qui, faisant trouver aisément $V$ par $V'$, serait commode pour calculer les vies moyennes correspondantes aux divers âges, en commençant par le plus avancé (*).

(*) La formule ci-dessus est tirée de la *Théorie analytique des Probabilités*, pag. 411.

108. C'est par la durée de la vie moyenne que l'on compare, sous le rapport de la vitalité, les âges, les lieux et les époques. En France, suivant la Table de l'*Annuaire*, on trouve pour cette durée, à partir de la naissance, 28 ans 9 mois; à Londres, 17 ans 11 mois; à Vienne, 15 ans 9 mois; à Berlin, 17 ans 1 mois; et en Suisse, 37 ans 1 mois.

Les sexes offrent aussi à cet égard une différence assez considérable. M. Mourgues a trouvé, d'après 21 ans d'observations, qu'à Montpellier, la vie moyenne, à partir de la naissance, était de 26 ans 3 mois et 20 jours, en prenant collectivement les deux sexes; mais qu'en les distinguant, celle des hommes était de 24 ans 3 mois et 15 jours, et celle des femmes, de 28 ans 3 mois et 28 jours (*).

Ce n'est qu'après avoir passé les dangers de la première enfance, qu'on arrive à la plus longue espérance de vie. L'âge auquel correspond cette espérance, ou à partir duquel la vie moyenne a la plus grande durée, varie suivant les lieux, et indique ainsi l'époque de la vie que le pays, ou les autres circonstances caractéristiques de la Table favorisent le plus. En France, la Table de l'*Annuaire* donne, pour ce *maximum*, 43 ans 5 mois, et le place à 5 ans; celui de la vie probable y est de 45 ans 8 mois, et se trouve 1 an plus tôt.

Les observations sur la mortalité ne remontent pas assez haut pour qu'on puisse comparer les tems un peu anciens avec le tems présent. Il paraît cependant probable que les progrès des arts et des sciences, en multipliant les commodités de la vie, en ont augmenté la

(*) *Mémoires présentés à la première Classe de l'Institut, par des Savans étrangers*, t. Ier, pag. 71—72.

durée moyenne ; et la ville de Genève offre déjà quelques faits qui le prouvent. Au seizième siècle, la vie moyenne n'y était que de 18 ans $\frac{1}{2}$ ; au dix-septième siècle, elle s'était élevée à 23 $\frac{1}{2}$ ; au dix-huitième siècle, elle s'est accrue jusqu'à 32 ans $\frac{1}{5}$. Il en est de même pour la vie probable (104) : elle était seulement de 4 ans $\frac{3}{4}$ au seizième siècle ; de 11 $\frac{2}{3}$ au dix-septième, et surpassait 27 ans au dix-huitième siècle (*).

109. La Table de mortalité sert encore à déterminer la manière dont la population se compose par rapport aux âges. En supposant toujours que l'état de cette population soit stationnaire, c'est-à-dire que le nombre des naissances annuelles soit à très-peu près égal à celui des décès, et constant, il suffit, pour trouver le nombre des individus existans dans un âge donné, de remonter à l'année où les individus de cet âge ont dû naître, et de calculer par la Table de mortalité combien il en doit rester à la première époque ; ce sera le nombre demandé.

Si on prend le nombre de naissances marqué dans la Table, pour celui des naissances annuelles, et qu'on ajoute tous les nombres de cette Table, on aura le montant de la population correspondante aux naissances et à l'ordre de mortalité qu'elle représente. Puis si l'on retranche successivement de cette somme le nombre des naissances, celui des individus de 1 an, de 2 ans, etc., le reste exprimera le nombre des individus compris depuis 1 an, 2 ans, etc. jusqu'au terme de l'existence. C'est ainsi qu'a été formée la

(*) Voy. dans la *Bibliothèque britannique*, t. IV, pag. 328, un Mémoire de M. Hodier. Ces faits sont rapportés aussi par M. Malthus, dans son *Essai sur le principe de la population*, t. II, pag. 31 de la traduction française.

Table insérée dans l'*Annuaire*, sous le titre de *Loi de la population en France*. Pour plus d'exactitude, d'après l'observation faite dans le n° précédent, on prend, au lieu des nombres marqnés pour chaque année, le milieu entre deux années consécutives, afin de rapporter les décès à la demi-année, qui en est l'époque moyenne.

Ce partage de la population, suivant les âges, est peut-être le résultat le plus important à considérer, dans l'estimation de la prospérité d'un état, si, comme M. Malthus paraît l'avoir prouvé, le nombre des naissances augmentant beaucoup dès qu'il s'est fait un vide dans la population, même à la suite de fléaux destructeurs, n'est pas propre à faire juger des progrès de cette population et de sa force réelle. En effet, cette dernière tient au nombre d'individus dans la vigueur de l'âge, et dont toutes les facultés sont développées autant que le permet l'état de la civilisation, secondé par une bonne distribution des moyens d'existence. Une nation parvenue à cet état doit l'emporter sur celle où il naîtrait plus d'enfans, dont la perte, très-multipliée, se réparerait aussi très-aisément, mais qui, par cette destruction prématurée, fournirait en proportion moins de sujets pour l'âge adulte. Un accroissement dans cette partie de la population n'est qu'une surcharge pour l'état.

110. Les divers problèmes, dont la solution est indiquée dans les n[os] précédens, en supposant que la population soit stationnaire, ont été traités par Euler, en ayant égard aux changemens qu'elle pourrait recevoir, par la différence entre le nombre des naissances et celui des décès (*); je vais montrer comment on

(*) *Mémoires de l'Académie de Berlin*, *année* 1760, p. 144.

parvient à quelques-unes de ses formules, tant pour confirmer les principes posés dans le n° 107, que pour donner une idée de ce genre de recherches.

Soit $P$ la population à une époque donnée, $N$ le nombre des naissances, $M$ celui des morts, $P'$, $N'$, $M'$, $P''$, etc. les nombres analogues pour les années suivantes, et faisons $\frac{P}{N}=n$, $\frac{P}{M}=m$; il viendra

$$P=nN=mM; \quad \text{d'où} \quad M=\frac{nN}{m},$$

$$P'=P+N-M=P+N\left(1-\frac{n}{m}\right)=P+P\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$$

$$=P\left(1+\frac{m-n}{mn}\right).$$

Si on suppose constans les rapports $n$ et $m$, on aura de même

$$P''=P'\left(1+\frac{m-n}{mn}\right)=P\left(1+\frac{m-n}{mn}\right)^2, \text{ etc.},$$

et la population sera croissante ou décroissante, selon que $m>n$ ou $m<n$.

Si, pour abréger, on fait $1+\frac{m-n}{mn}=q$, et que dans les équations

$$P'=nN', \quad P''=nN'', \quad \text{etc.}$$

on mette pour $P'$, $P''$, etc. leurs valeurs $Pq$, $Pq^2$, etc., puis pour $P$ sa valeur $nN$, toutes les équations formées ainsi seront divisibles par $n$ et donneront

$$N'=Nq, \quad N''=Nq^2, \quad \text{etc.};$$

on obtiendrait de même

$$M'=Mq, \quad M''=Mq^2, \quad \text{etc.}$$

Ces formules font voir que, dans l'hypothèse établie, la population, le nombre annuel des naissances et celui des décès, suivent tous des progressions par quotiens, dont la raison est la même. Il suffit donc de connaître par l'observation deux termes consécutifs de l'une de ces progressions, pour en déterminer la raison; et rien ne sera plus aisé ensuite que de trouver dans combien d'années la population s'est accrue dans un rapport donné.

Soit $s$ ce rapport, et $r$ le nombre d'années écoulées depuis l'époque de $P$, on aura l'équation

$$Pq^r = sP, \quad \text{ou} \quad q^r = s;$$

et prenant les logarithmes, on obtiendra

$$r = \mathrm{l}\frac{s}{q}.$$

La rapidité de l'accroissement de la population dépend en grande partie de l'espace libre et productif sur lequel elle peut s'étendre, et de l'augmentation des subsistances. Les États-Unis d'Amérique, réunissant ces deux avantages, paraissent doubler de population en 25 ans. On a lieu de croire que cet accroissement pourrait s'opérer en 15, dans le cas le plus favorable.

111. Au moyen des relations obtenues dans l'article précédent, on détermine facilement la loi de mortalité, lorsqu'on connaît $N$, $q$, $M$, et comment ce dernier nombre se décompose suivant les âges, c'est-à-dire si l'on a le nombre des morts de chaque âge à l'époque donnée. En désignant par

$$v_1, \quad v_2, \quad v_3, \quad \text{etc.}$$

le rapport entre le nombre des individus de 1, 2,

3, etc. ans, et le nombre des naissances, et par

$$M_0, \quad M_1, \quad M_2, \quad M_3, \quad \text{etc.}$$

le nombre des décès avant l'âge de 1, 2, 3, etc. ans, on aura d'abord

$$v_1 = \frac{N - M_0}{N}; \quad \text{d'où} \quad M_0 = N(1 - v_1).$$

Si l'on remonte à l'année qui a précédé l'époque des nombres $P$, $N$, $M$ (110), on trouvera $\frac{N}{q}$ pour le nombre des naissances, d'où proviennent les enfans âgés de 2 ans; suivant la loi de mortalité, ce nombre a dû se réduire à $\frac{N}{q}v_1$ dès la première année, et à la 2^e^ devenir $\frac{N}{q}v_2$: on aura donc pour la mortalité, entre la première et la 2^e^ année,

$$M_1 = \frac{N}{q}v_1 - \frac{N}{q}v_2 = \frac{N}{q}(v_1 - v_2).$$

Remontant ensuite à 2 ans avant l'époque donnée, pour arriver à la naissance des enfans de 3 ans, le nombre correspondant des naissances est $\frac{N}{q^2}$; il se réduit à $\frac{N}{q^2}v_2$ à la 2^e^ année, puis à $\frac{N}{q^2}v_3$ à la 3^e^; donc la mortalité, entre la 2^e^ et la 3^e^ année, sera ...... $\frac{N}{q^2}(v_2 - v_3)$, et par conséquent

$$M_2 = \frac{N}{q^2}(v_2 - v_3).$$

En continuant ainsi on trouvera toujours des équa-

tions de même forme, desquelles on tirera successivement

$$v_1 = 1 - \frac{M_0}{N},$$

$$v_2 = v_1 - \frac{M_1 q}{N} = 1 - \frac{M_0 + M_1 q}{N},$$

$$v_3 = v_2 - \frac{M_2 q^2}{N} = 1 - \frac{M_0 + M_1 q + M_2 q^2}{N},$$

$$v_4 = v_3 - \frac{M_3 q^3}{N} = 1 - \frac{M_0 + M_1 q + M_2 q^2 + M_3 q^3}{N},$$

etc.

Lorsque $q = 1$, on a $M = N$, et les expressions ci-dessus se réduisent à

$$Nv_1 = M - M_0,$$
$$Nv_2 = M - M_0 - M_1,$$
$$Nv_3 = M - M_0 - M_1 - M_2,$$
$$Nv_4 = M - M_0 - M_1 - M_2 - M_3,$$

etc.

c'est-à-dire que la Table de mortalité se déduit du nombre de décès partagé suivant les âges, ainsi qu'on l'a indiqué dans le n° 102.

112. Quand la loi de la mortalité est connue, celle de la population se détermine de même, en remontant aux naissances antérieures à l'époque de $P$, et réduisant chacun de ces nombres suivant les années écoulées. Si l'on prend 100 pour le terme de la vie, on aura pour les âges

$$1, \ 2, \ 3, \ldots\ldots 100,$$

les nombres d'individus

$$N, \ \frac{N}{q} v_1, \ \frac{N}{q^2} v_2, \ \frac{N}{q^3} v_3, \ldots \frac{N}{q^{100}} v_{100},$$

et par conséquent

$$P = N + \frac{N}{q}\nu_1 + \frac{N}{q^2}\nu_2 \ldots\ldots + \frac{N}{q^{100}}\nu_{100};$$

d'où

$$\frac{P}{N} = 1 + \frac{\nu_1}{q} + \frac{\nu_2}{q^2} + \frac{\nu_3}{q^3} \ldots\ldots + \frac{\nu_{100}}{q^{100}}.$$

Lorsque la population est stationnaire, $q$ étant 1, on a, comme dans le n° 109,

$$P = N\left\{1 + \nu_1 + \nu_2 \ldots\ldots + \nu_{100}\right\}.$$

En substituant aux quantités $1, \nu_1, \nu_2, \nu_3$, etc. la moyenne prise entre les deux qui se suivent immédiatement, savoir,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu_1,\ \frac{1}{2}\nu_1 + \frac{1}{2}\nu_2, \ldots \frac{1}{2}\nu_{99} + \frac{1}{2}\nu_{100},\ \frac{1}{2}\nu_{100},$$

la formule ci-dessus se change en

$$P = N\left\{\frac{1}{2} + \nu_1 + \nu_2 \ldots\ldots + \nu_{100}\right\} (*),$$

qui est la règle indiquée dans le n° 109.

113. Halley paraît être le premier qui ait fait voir

(*) Si la loi de mortalité était exprimée par une formule, comme celle de Lambert (106), on pourrait cesser de s'astreindre à placer tous les décès annuels à la même époque, et supposer que l'extinction des individus se fait d'une manière continue pendant toute la durée de l'année; mais il faudrait substituer des différentielles et des intégrales, aux quantités et aux suites rapportées dans le texte; ainsi qu'on peut le voir dans l'ouvrage publié par M. Duvillard, sous le titre d'*Analyse et tableaux de l'influence de la petite vérole sur la mortalité*. C'est de la première Table de cet ouvrage qu'ont été extraites celles de l'*Annuaire* que j'ai citées.

comment on pouvait conclure d'une Table de mortalité, les probabilités de la durée de la coexistence de plusieurs individus, de la durée des mariages, par exemple, connaissant l'âge de chacun des membres de l'association. Son procédé n'est autre que celui de la formation des probabilités composées (16).

Pour en montrer l'application au sujet proposé, cherchons les diverses probabilités relatives à 10 années d'association d'un individu de 25 ans avec un de 20. Il pourra arriver, ou qu'ils existent encore tous deux au bout des 10 années, ou qu'un seul vive, ou que tous deux soient morts. La Table de mortalité de l'*Annuaire*, réduite sur le pied de 1000 naissances, donne pour vivre 10 ans, à partir de 25 ans,

la probabilité $\frac{404}{471}$, sa contraire $1-\frac{404}{471}=\frac{67}{471}$;

et à partir de 20 ans,

la probabilité $\frac{438}{502}$, sa contraire $1-\frac{438}{502}=\frac{64}{502}$.

De ces probabilités simples résultent les probabilités composées

$\frac{404}{471}\cdot\frac{438}{502}$, qu'ils existeront tous deux;

$\frac{67}{471}\cdot\frac{438}{502}$, que le plus âgé sera mort;

$\frac{404}{471}\cdot\frac{64}{502}$, que le plus jeune sera mort;

$\frac{67}{471}\cdot\frac{64}{502}$, que tous deux seront morts.

En général, si $e$ et $e'$ désignent les probabilités de l'existence de chaque individu au terme de l'asso-

ciation, $f$ et $f'$ les probabilités contraires, le développement de

$$(e+f)(e'+f') = ee' + e'f + ef' + ff' = 1,$$

donnera

$$ee',\ e'f,\ ef',\ ff'$$

pour les quatre probabilités énoncées ci-dessus. Quand on cherche seulement la probabilité que l'un quelconque des deux individus existera encore, on a

$$ee' + e'f + ef' = 1 - ff',$$

ce qui est plus simple lorsque les nombres $f$ et $f'$ sont les plus petits.

114. Avec ces probabilités, on peut dresser la Table de mortalité particulière à chaque association ; si l'on en suppose, par exemple, 1000 formées à-la-fois, et que les probabilités simples $e$, $e'$, $f$, $f'$, se rapportent à la première année écoulée depuis, il y aura à la fin de cette année

| | |
|---|---|
| 1000 $ee'$ associations | qui subsisteront encore, |
| 1000 $e'f$ | où le plus jeune survivra, |
| 1000 $ef'$ | où le plus âgé survivra, |
| 1000 $ff'$ | où tous deux seront morts. |

Calculant les mêmes nombres pour chaque année, on formera une Table pareille à celle que M. Duvillard a construite pour les mariages, sur les registres de la ville de Genève (*), et à l'aide de laquelle on déterminera la *durée probable* et la *durée moyenne* de l'association, comme la *vie probable* et la *vie moyenne*, par la Table de mortalité des individus (104 et 107).

Pour donner plus d'exactitude à sa Table des ma-

(*) *Recherches sur les Emprunts*, pag. 60.

riages, M. Duvillard a pris $e$ et $f$ suivant la loi de mortalité particulière aux hommes, $e'$ et $f'$ suivant celle des femmes; mais ce soin, auquel il s'est borné, faute de pouvoir faire mieux, laisse encore quelqu'incertitude, car dans les Tables ordinaires de mortalité, les décès des individus mariés sont confondus avec ceux des célibataires, et il y a lieu de présumer que l'ordre de mortalité n'est pas le même pour ces deux classes : il faudrait donc les séparer. Des Tables construites d'après des observations faites immédiatement sur les mariages, mériteraient la préférence sur les nombres conclus par le procédé indiqué ci-dessus, et dispenseraient en outre de tout le calcul qu'il faut faire pour obtenir ces derniers. Voilà un exemple très-frappant et très-simple de ce que j'ai annoncé dans le n° 101, sur l'avantage des observations directes. Tant qu'on n'a connu dans chaque lieu qu'une loi générale de la mortalité, il a fallu supposer qu'elle convenait à peu près aux deux sexes; a-t-on fait la distinction des sexes, il a fallu supposer encore que la mortalité des personnes mariées différait peu de celle des célibataires: mais l'observation particulière de la durée des mariages et de leur dissolution, dispense de toute hypothèse, en donnant immédiatement les probabilités dont on a besoin.

115. Les recherches sur les probabilités de la vie humaine ont trouvé une application bien importante, dans les disputes qui se sont élevées sur l'inoculation de la petite vérole. Il y avait à résoudre deux questions décisives : premièrement, il fallait montrer combien l'inoculation conserverait d'individus, afin de faire connaître de quelle utilité elle pouvait être à la société; et considérant ensuite le sujet sous le rapport de l'intérêt personnel, il fallait balancer le danger que cette

opération faisait courir à l'individu, suivant son âge, sa constitution, avec le danger de mourir de la petite vérole naturelle, plutôt que de toute autre maladie. Le premier de ces dangers étant actuel, devait frapper beaucoup plus l'imagination que le second, réparti sur toute la durée de l'existence et ne paraissant que dans l'éloignement. A cette distinction, d'Alembert voulait qu'on ajoutât la différence de prix que doivent avoir les années de la jeunesse, comparativement à celles d'un âge avancé; mais ici on retombe dans ces estimations vagues qui ne peuvent être l'objet d'aucun calcul exact.

On arriverait facilement à des déterminations précises sur l'une et l'autre des questions énoncées plus haut, si l'on connaissait le nombre des individus que la petite vérole attaque dans chaque année, avec leur âge, le nombre de ceux qui en meurent, et quelle serait la probabilité de mourir chaque année, si la petite vérole était éteinte. Ce dernier élément a été conclu des données précédentes et des Tables ordinaires de mortalité, en retranchant du nombre total des morts de chaque âge, celui des morts causées par la maladie, et divisant le reste par le nombre total des individus existans à cet âge; mais, cela suppose, ce me semble, que les individus éteints par la petite vérole, n'auraient succombé à aucune autre maladie, s'ils eussent été préservés de celle-là, supposition qu'on pourrait bien ne pas admettre. Il paraît plus exact de comparer le nombre de décès occasionnés par d'autres maladies que la petite vérole, non pas à la totalité des individus de l'âge dont il s'agit, mais au nombre de ces individus, diminué de ceux qui sont morts de la petite vérole, quoique ce ne soit pas encore tenir compte de la manière dont se seraient éteints ces derniers individus, s'ils eussent été

préservés de la petite vérole. Pour éviter ces objections, il faudrait déterminer immédiatement cette mortalité sur des individus soustraits à l'influence de la maladie. En choisissant ceux qui ont déjà eu la petite vérole, on pourrait néanmoins encore craindre que l'effet de cette maladie n'eût opéré dans leur constitution un changement d'après lequel leur ordre de mortalité ne fût pas le même que pour des individus préservés de toute autre manière; mais quoi qu'il en soit de ces difficultés, les résultats n'en conservent pas moins la même marche, et je ne les ai exposées que pour montrer combien le sujet est épineux. Je reviens aux données inquées ci-dessus.

$N$ étant toujours le nombre annuel des naissances, je désignerai par $v'$, $v''$, $v'''$, etc. le nombre des individus existans à 1, 2, 3, etc. ans, par $\alpha$, $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$, etc. ceux qui sont attaqués de la petite vérole avant 1, 2, 3, etc. ans, et par $\mu$, $\mu'$, $\mu''$, $\mu'''$, etc. ceux qui en meurent. Le nombre de morts causées par d'autres maladies sera,

| | |
|---|---|
| de 0 à 1 an, | $N - v' - \mu$, |
| 1 à 2 | $v' - v'' - \mu'$, |
| 2 à 3 | $v'' - v''' - \mu''$, |
| etc. | |

Les probabilités de mourir de ces maladies seront, dans la première hypothèse,

$$\frac{N-v'-\mu}{N}, \quad \frac{v'-v''-\mu'}{v'}, \quad \frac{v''-v'''-\mu''}{v''}, \quad \text{etc.},$$

et dans la seconde,

$$\frac{N-v'-\mu}{N-\mu}, \quad \frac{v'-v''-\mu'}{v'-\mu'}, \quad \frac{v''-v'''-\mu''}{v''-\mu''}, \quad \text{etc.}$$

En général, qu'elles soient déduites, soit de ces expressions, soit des précédentes, ou de toute autre manière, désignons-les par $m$, $m'$, $m''$, $m'''$, etc. ; après l'extinction de la petite vérole, un nombre $N$ de naissances donnera $N(1-m)$ enfans âgés de 1 an, $N(1-m)(1-m')$ enfans âgés de 2 ans, etc., nombres qui formeront la Table de mortalité correspondante à cet état de choses; et en la comparant à la suite des nombres $N$, $\nu'$, $\nu''$, $\nu'''$, etc., on en déduira le nombre des individus qui sont conservés dans chaque âge, l'augmentation de vie moyenne gagnée par eux en particulier, et celle qui en résulte pour tous les individus. Connaissant d'ailleurs le rapport du nombre annuel des mariages à celui des individus nubiles, et le rapport du nombre des mariages aux naissances, on obtiendrait l'accroissement produit dans les naissances, par les individus conservés : ce serait le gain de la population; mais pour qu'il ait réellement lieu, il faut que la facilité de subsister croisse aussi dans le même rapport.

116. Dans l'état présent, $\alpha$ individus prenant la petite vérole de 0 à 1 an, et $\mu$ y succombant, il résulte, pour cette première année, les probabilités $\frac{\alpha}{N}$ de prendre la petite vérole, $\frac{\alpha}{N}\times\frac{\mu}{\alpha}=\frac{\mu}{N}$ d'en mourir (16), et $\frac{N-\alpha}{N}$ de n'en être pas atteint.

Des $N-\alpha$ individus qui ne l'ont point la première année, la mortalité causée par les autres maladies n'en laissera que $(N-\alpha)(1-m)$ ; sur ce nombre, $\alpha'$ prendront la petite vérole dans la seconde année, et $\mu'$ y succomberont; ainsi on aura, pour cette 2[e] année, les pro-

babilités $\frac{\alpha'}{(N-\alpha)(1-m)}$ de prendre la petite vérole, $\frac{\mu'}{(N-\alpha)(1-m)}$ d'en mourir, et $1-\frac{\alpha'}{(N-\alpha)(1-m)}$ de n'en être pas attaqué. Le nombre des individus qui ne seront pas atteints étant alors $(N-\alpha)(1-m)-\alpha'$, se réduira, par les autres maladies, à........... $\{(N-\alpha)(1-m)-\alpha'\}(1-m')$, de la seconde à la troisième année. En continuant ainsi, on calculera les probabilités correspondantes à chaque année.

Si, pour abréger, on désigne par $\iota'$, $\iota''$, $\iota'''$, etc. le nombre des individus qui ne sont pas encore atteints de la petite vérole au commencement de chaque année, les probabilités d'en mourir seront, pour la 1^re^, la 2^e^, la 3^e^, etc. année,

$$\frac{\mu}{N},\quad \frac{\mu'}{\iota'},\quad \frac{\mu''}{\iota''},\quad \text{etc.};$$

les probabilités d'être du nombre des individus qui n'en ont pas encore été attaqués seront, au commencement des années 1, 2, 3, etc.,

$$\frac{\iota'}{N},\quad \frac{\iota''}{\iota'},\quad \frac{\iota'''}{\iota''},\quad \text{etc.};$$

d'où il suit que les probabilités d'en mourir, dans 1, 2, 3, etc. ans, à partir de la naissance, seront

$$\frac{\iota'}{N}\cdot\frac{\mu'}{\iota'}=\frac{\mu'}{N},\quad \frac{\mu''}{N},\quad \frac{\mu'''}{N},\quad \text{etc.};$$

et en partant de 1 an,

$$\frac{\mu'}{\iota'},\quad \frac{\mu''}{\iota'},\quad \frac{\mu'''}{\iota'},\quad \text{etc.},$$

résultats qu'on peut appliquer à toutes les années, en accentuant, d'après le numéro de ces années, les quantités $\iota$ et $\mu$. La somme

$$\frac{\mu' + \mu'' + \mu''' + \ldots}{\iota'}$$

de ces probabilités, poussée jusqu'à la plus longue durée de la vie, donnera le risque de mourir de la petite vérole, rapporté à l'âge d'où l'on part. Ce risque est celui qui devait être comparé au risque de mourir de la petite vérole inoculée, pour estimer l'avantage que l'inoculation offrait à l'individu qui voulait s'y soumettre.

117. Il serait aisé de tirer de ces calculs le nombre des individus de chaque âge, qui meurent sans avoir eu la petite vérole, la durée moyenne de leur vie, et beaucoup d'autres conséquences, développées par M. Duvillard, dans l'Ouvrage cité, p. 192, mais dont le détail n'entre pas dans mon plan.

Daniel Bernoulli, par son éminente sagacité, suppléa aux données précédentes qui lui manquaient, en s'appuyant toutefois sur deux hypothèses que les faits n'ont pas confirmées, savoir, que le danger d'être attaqué de la petite vérole était le même pour tous les âges, ainsi que le danger d'y succomber (*) ; mais l'avantage était d'ailleurs si considérable, qu'il demeurait encore très-évident malgré ce défaut, que M. Duvillard, aidé des observations multipliées faites postérieurement au Mémoire de Bernoulli, a entièrement évité. Voici quelques-uns des principaux résultats qu'il a obtenus.

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, an. 1760, pag. 1.

On trouve aux pages 142 et suiv. de son Ouvrage, 1°. que dans l'état naturel, sur 1 000 000 d'enfans naissans, 85 685 mourront tôt ou tard de la petite vérole, et que la vie moyenne de ceux-ci sera de $3^{ans},9$ ; 2°. que si cette maladie avait disparu, leur vie moyenne s'éleverait à $44^{ans},7$ ; et que dans cet ordre de choses, que l'auteur appelle l'*état non variolique*, la vie moyenne de tous les individus serait de $32^{ans}\frac{1}{4}$ au lieu de $28^{ans}\frac{1}{4}$ (108), la population, qui, pour 1 000 000 de naissances, ne monte qu'à 28 763 000 individus, s'éleverait à 32 256 000. Tels seraient les effets de la *vaccine*, si la pratique en devenait générale. Et qui pourrait empêcher qu'il n'en fût ainsi, puisqu'elle est d'une extrême facilité, qu'elle ne présente aucun danger, et que le nombre des épreuves directes et inverses auxquelles elle a déjà été soumise constate son utilité, par une probabilité très-approchante de l'unité, et appréciable par les calculs les plus simples ?

118. Ce n'est pas pour la petite vérole seulement que les médecins ont formé des tableaux d'observations : il y a déjà quelques ouvrages où l'on a suivi cette méthode, la seule qui soit vraiment démonstrative ; puisque la médecine ne se compose en grande partie que de faits déduits immédiatement de l'observation, qui seule a fait remarquer et a constaté l'effet des remèdes spécifiques les mieux reconnus pour tels. Les efforts de la nature se combinent de tant de manières avec les diverses méthodes curatives, qu'aucune de ces méthodes n'est peut-être entièrement dépourvue de succès, au moins apparens. C'est donc de la comparaison du nombre de ces succès, avec le nombre total des maladies traitées suivant chaque méthode, et des maladies abandonnées à la nature (si ce dernier cas pouvait avoir lieu), qu'on doit assigner le mérite re-

latif de ces méthodes, et répondre aux objections renouvelées sans cesse contre la médecine. M. Pinel, et plusieurs autres médecins, ont fait connaître les résultats obtenus dans les hôpitaux où se traite l'aliénation mentale. En 1789, M. William Black, médecin anglais, a publié la seconde édition d'une *Analyse arithmétique et médicale des maladies et de la mortalité de l'espèce humaine* (*An arithmetical and medical Analysis* etc.). C'est par la continuation et l'extension d'un pareil travail, que l'on pourra constater irrévocablement si la médecine fait des progrès réels : les hôpitaux, plus nombreux et beaucoup mieux tenus que dans le siècle dernier, offrent à cet égard de grandes facilités (*).

---

(*) On a tant calomnié l'esprit philosophique, c'est-à-dire la raison appliquée à tout ce qui intéresse la société, qu'il doit être permis de rappeler les faits évidens qui parlent en sa faveur. L'un des plus frappans est l'amélioration du sort des malades dans les hôpitaux, due aux efforts d'hommes bien connus pour n'être mus que par une philantropie purement humaine. C'est par leurs soins, et dans un temps difficile, qu'a cessé l'entassement des malades dans un même lit à l'*Hôtel-Dieu*, que les mesures ont été prises pour diminuer la mortalité effrayante des enfans trouvés, qu'ont été formés des hospices séparés pour l'accouchement et l'allaitement, et beaucoup d'autres institutions d'ordre et de bienfaisance qu'il serait trop long de détailler ici. Dans ce dix-septième siècle, si vanté, la mortalité de l'Hôtel-Dieu de Paris était le scandale des étrangers : il y périssait plus de 3000 malades par an, faute de soins. (Voyez *Essay tending to prove that in the Hospital called* l'Hôtel-Dieu *at* Paris, *there die above* 3000 *per annum, by reason of ill accommodation* (1687), *Politicals Essays*, by William Petty, édit. de 1755, p. 63).

Le zèle religieux comme la pitié, peut sans doute prodiguer les secours, mais la raison seule, les dispensant avec impartialité, établissant l'économie par l'ordre, sait faire participer le plus grand nombre d'individus au bienfait, et préparer dans le présent des ressources pour l'avenir.

*Des Rentes viagères, et des Assurances sur la vie et sur les choses.*

119. Les probabilités de la vie humaine, combinées avec l'accroissement des fonds placés à intérêt composé, ont donné lieu aux *rentes viagères*, aux *assurances sur la vie*, aux *caisses d'épargne*, et en général à toutes les spéculations par lesquelles on se procure, soit pour le présent, soit pour l'avenir, des avantages pécuniaires dépendans des chances de la mortalité. L'importance de ces théories a multiplié beaucoup les questions qui s'y rapportent et les auteurs qui en ont traité. On ne doit donc s'attendre à trouver ici que les indications nécessaires pour montrer comment le sujet se rattache au calcul des probabilités; et la solution des problèmes les plus simples suffira pour cela.

Considérons premièrement chacun des $v$ individus compris dans une Table de mortalité à un âge donné, comme propriétaire d'une rente viagère $s$; ou comme devant toucher annuellement cette somme pendant toute la durée de sa vie; celui qui est chargé de payer ces rentes, et que je nommerai le *banquier*, donnera à la fin de la 1^re^ année la somme $v's$, à la fin de la 2^e^, $v''s$, à la fin de la 3^e^, $v'''s$, et ainsi de suite; $v'$, $v''$, $v'''$, etc. désignant le nombre des individus existans à la fin de ces années. Si $t$ représente le taux de l'intérêt, ces sommes, rapportées au commencement de la première année (*Voyez* les *Elém. d'Algèbre.*), deviendront respectivement

$$\frac{v's}{1+t}, \quad \frac{v''s}{(1+t)^2}, \quad \frac{v'''s}{(1+t)^3}, \quad \text{etc.} \ldots$$

et ainsi de suite, jusqu'à l'âge où finit la Table de

mortalité. En les ajoutant on aura la valeur totale de ce qu'ont dû payer les individus existans à la première époque, pour acquérir ces rentes; chacun d'eux aura donc payé pour sa part,

$$\frac{1}{v}\left\{\frac{v's}{1+t}+\frac{v''s}{(1+t)^2}+\frac{v'''s}{(1+t)^3}+\text{etc.}\right\}=$$
$$\frac{s}{v}\left\{\frac{v'}{1+t}+\frac{v''}{(1+t)^2}+\frac{v'''}{(1+t)^3}+\text{etc.}\right\}=S.$$

La somme $S$ est le *capital* de la rente viagère $s$; c'est aussi la valeur moyenne des sommes payées par le banquier, réparties entre tous les individus de la Table, de manière qu'il n'éprouvera ni perte, ni gain, si l'extinction des rentiers a lieu conformément aux nombres marqués dans cette Table.

La formule de l'espérance mathématique donne la même expression pour $S$, en ne considérant si l'on veut qu'un seul rentier; car les sommes éventuelles rapportées à la première époque étant

$$\frac{s}{1+t},\quad \frac{s}{(1+t)^2},\quad \frac{s}{(1+t)^3},\quad \text{etc.},$$

et les probabilités que le rentier existera à la fin des années

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \text{etc.}$$

étant

$$\frac{v'}{v},\quad \frac{v''}{v},\quad \frac{v'''}{v},\quad \text{etc.},$$

son espérance mathématique sera

$$\frac{v'}{v}\,\frac{s}{1+t}+\frac{v''}{v}\,\frac{s}{(1+t)^2}+\frac{v'''}{v}\,\frac{s}{(1+t)^3}+\text{etc.}=$$
$$\frac{s}{v}\left\{\frac{v'}{1+t}+\frac{v''}{(1+t)^2}+\frac{v'''}{(1+t)^3}+\text{etc.}\right\},$$

valeur de $S$ trouvée ci-dessus.

120. Ces deux manières de mettre le problème en équation, doivent rappeler les réflexions du n° 78, et montrer comment le sort de l'emprunteur qui se charge d'une seule rente viagère, diffère de celui du banquier payant un nombre de rentiers assez considérable pour que leurs décès suivent l'ordre indiqué par la Table de mortalité. La première entreprise est bien hasardeuse; l'autre, au contraire, l'est peu, si toutefois la Table de mortalité a été construite ou choisie d'après la classe d'individus qui doivent composer les rentiers. Quand il s'agit d'un emprunt public à rentes viagères, on doit bien se garder d'employer la Table de mortalité générale, pour une grande capitale; car ce ne sont guère que des individus choisis qui s'intéressent à ces emprunts : aussi sont-ils très-onéreux à l'état quand on donne le même taux *sur toutes têtes*, c'est-à-dire pour un âge quelconque, comme on l'a fait, en France, vers 1780, ce qui a produit la spéculation suivante.

Des banquiers, ayant remarqué l'avantage que les femmes avaient à Genève sur les hommes, par rapport à la durée moyenne de la vie, en ont fait choisir par des médecins, un certain nombre ayant déjà subi les épreuves de la petite vérole, de la rougeole, dont la constitution paraissait la meilleure, et dont ils pouvaient surveiller la conduite; c'est sur ces têtes qu'ils ont placé leurs fonds, dont ils ont formé un seul capital, divisé en actions, par un arrangement fait entr'eux, de manière à pouvoir associer un grand nombre de personnes à leur spéculation. Recevant 9 pour 100 d'intérêt, ils pouvaient donner 7 pour 100, ce qui était au-dessus de l'intérêt légal, et les 2 pour 100 qui leur restaient, étant placés à intérêt composé, à 5 pour 100 seulement, devaient en 26 ans reformer

le capital. Or la vie probable des femmes de Genève, prise à l'âge de 20 ans, surpasse beaucoup ce terme, puisqu'elle s'élève à 40; et de plus, comme ce n'est là que le terme moyen, pris sur toutes les professions, il y a bien lieu de croire que celui des sujets choisis par les banquiers dont nous parlons aurait été plus fort, ensorte qu'on ne s'éloignerait pas beaucoup de la vérité, en prenant pour leur profit ce que serait devenu le capital au bout de 40 ans, et alors il se serait plus que doublé.

Ce n'est là qu'un aperçu; car pour avoir la vraie mesure du désavantage de l'emprunteur dans le cas actuel, il faudrait connaître avec précision l'ordre de mortalité des individus de la classe dont il s'agit, et calculer à quel taux devrait être l'intérêt de l'argent, pour qu'ils pussent obtenir 9 pour 100 en rentes viagères. La solution de cette question dépendrait de l'équation du n° 119; les données seraient $v$, $v'$, $v''$, $v'''$, etc.; on aurait $s=\frac{9S}{100}$, $S$ disparaîtrait comme facteur commun aux deux membres, et il viendrait

$$1=\frac{9}{100v}\left\{\frac{v'}{1+t}+\frac{v''}{(1+t)^2}+\frac{v'''}{(1+t)^3}+\text{etc.}\right\},$$

équation de laquelle il faudrait tirer la valeur de $t$, ce qui ne pourrait se faire que par des tâtonnemens assez laborieux, si l'on n'avait pas déjà un grand nombre de Tables construites d'après divers ordres de mortalité, et pour divers taux d'intérêt.

121. Il est évident que de simples opérations arithmétiques suffisent pour calculer la valeur de $S$ et résoudre la question directe, en ayant même égard à une circonstance que j'ai négligée, pour plus de simplicité. J'ai supposé, dans la construction de la for-

mule du n° 119, que les décès des rentiers avaient lieu à la fin de chaque année; mais comme il n'en est pas ainsi, et que l'on paie aux héritiers une partie de la rente proportionnelle au tems que le rentier a vécu, il faudra, pour compenser cette différence, substituer $\frac{1}{2}(v+v')$ à $v'$, $\frac{1}{2}(v'+v'')$ à $v''$, etc. Si l'on voulait établir la loi de continuité dans les décès, il faudrait substituer aux nombres $v$, $v'$, $v''$..... une expression générale de la loi de mortalité (106), et recourir au calcul intégral (*Voyez* la note III.).

Le plus souvent on n'emploie, pour abréger le calcul, que la distinction des périodes pendant lesquelles il est permis de regarder le nombre annuel des morts comme constant. En désignant ce nombre par $m$, il vient

$$v'=v-m\,,\ v''=v-2m,\ v'''=v-3m\,,\ \text{etc.},$$

ce qui change la valeur de $S$ en

$$S'=\frac{s}{v}\left\{\frac{v-m}{1+t}+\frac{v-2m}{(1+t)^2}+\frac{v-3m}{(1+t)^3}+\text{etc.}\right\}.$$

Cette expression se décompose dans les deux suites

$$\frac{s}{1+t}\left\{1+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1+t)^2}\ldots\ldots+\frac{1}{(1+t)^{n-1}}\right\}$$
$$-\frac{sm}{v(1+t)}\left\{1+\frac{2}{1+t}+\frac{3}{(1+t)^3}\ldots\ldots+\frac{n}{(1+t)^{n-1}}\right\},$$

$n$ représentant le nombre d'années de la période. Si, pour abréger, on fait $\frac{1}{1+t}=q$, la première suite, qui est une progression par quotiens, deviendra

$$qs\left\{1+q+q^2\ldots\ldots+q^{n-1}\right\}=qs\,\frac{1-q^n}{1-q};$$

et la seconde se changeant en

$$-\frac{qsm}{v}\{1+2q+3q^2.....+nq^{n-1}\},$$

on posera

$$1+2q+3q^2.....+nq^{n-1}=f;$$

multipliant les deux membres de cette équation par $q$, il viendra

$$q+2q^2+3q^3.....+nq^n=fq;$$

et ajoutant au premier membre la progression par quotiens

$$1+q+q^2+q^3.....+q^n;$$

au second, $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, somme de cette progression, on obtiendra

$$1+2q+3q^2+4q^3....+(n+1)q^n=fq+\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Observant alors que

$$1+2q+3q^2+4q^3....+(n+1)q^n=f+(n+1)q^n,$$

on formera l'équation

$$f+(n+1)q^n=fq+\frac{1-q^{n+1}}{1-q};$$

d'où l'on déduira

$$f=\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2}-\frac{(n+1)q^n}{1-q}\ (*).$$

(*) On parvient bien facilement à ce résultat par le calcul différentiel ; car il est visible que

$$1+2q+3q^2...+nq^{n-1}=\frac{d(1+q+q^2...+q^n)}{dq}=\frac{d\frac{1-q^{n+1}}{1-q}}{dq}.$$

On trouvera de même la somme des séries analogues dans un ordre quelconque.

Au moyen de cette dernière somme et de celle de la première suite, on a enfin

$$S' = \frac{qs(1-q^n)}{1-q} - \frac{qsm}{v}\left\{\frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)q^n}{1-q}\right\};$$

formule où il ne reste plus qu'à mettre pour $q$ sa valeur $\frac{1}{1+t}$, et opérer quelques réductions, auxquelles je ne m'arrêterai pas. En l'appliquant à chaque période, depuis l'âge d'où l'on part jusqu'à la fin de la Table de mortalité, la somme des valeurs trouvées pour $S'$ donnera celle de $S$. L'hypothèse de Moivre (106) est commode en ce qu'elle ne fait qu'une seule période, à partir de 12 ans.

122. Comme le plus souvent c'est une Table de rentes viagères que l'on construit pour tous les âges, Euler, dans le Mémoire cité, p. 187, a trouvé commode de dériver le taux relatif à un âge, du taux relatif à l'âge suivant. Si l'on substitue des numéros inférieurs désignant les âges, aux accens dont les $v$ sont affectés dans la formule du n° 119, on aura pour l'âge $n$,

$$S_n = \frac{s}{v_n}\left\{\frac{v_{n+1}}{1+t} + \frac{v_{n+2}}{(1+t)^2} + \frac{v_{n+3}}{(1+t)^3} + \text{etc.}\right\};$$

et pour l'âge $n+1$,

$$S_{n+1} = \frac{s}{v_{n+1}}\left\{\frac{v_{n+2}}{1+t} + \frac{v_{n+3}}{(1+t)^2} + \text{etc.}\right\},$$

l'âge le plus avancé de la Table de mortalité donnant le dernier terme de ces suites. Si on divise la seconde équation par $1+t$, qu'on multiplie les deux membres de la première par $v_n$, ceux de la seconde par $v_{n+1}$, et qu'on retranche les produits terme à terme, il res-

tera seulement l'équation

$$v_n S_n - \frac{v_{n+1}}{1+t} S_{n+1} = s \frac{v_{n+1}}{1+t},$$

qui fera connaître $S_n$ par le moyen de $S_{n+1}$, et pourra servir à calculer les valeurs du capital de la rente $s$, en commençant par l'age le plus avancé. Assez ordinairement on fait $s = 1^{fr.}$, ou $= 100^{fr.}$

123. Les rentes sur deux têtes se calculent d'une manière analogue, en substituant aux probabilités $\frac{v'}{v}$, $\frac{v''}{v}$, etc. du n° 119, les valeurs successives de la quantité

$$ee' + e'f + ef' = 1 - ff'$$

qui, dans le n° 113, exprime la probabilité de l'existence de l'une quelconque des deux têtes sur lesquelles la rente est constituée, ou bien en appliquant à une Table indiquant la loi suivant laquelle s'éteignent un nombre donné d'associations d'âges donnés, les considérations par lesquelles commence le n° 119.

124. L'espèce de *tontine* la plus simple, n'est au fond qu'une annuité à terme probable ; car dans ce placement, où les rentiers survivans héritent de ceux qui sont décédés, le banquier paie tous les ans la même somme, jusqu'à l'entière extinction de la classe des rentiers du même âge. Supposant que $S$ soit la somme qu'ils ont placée en commun, $s$ celle que le banquier leur paie chaque année, et $n$ le nombre d'années qui doit s'écouler jusqu'au terme de la Table de mortalité, on aura

$$S = s\left\{\frac{(1+t)^n - 1}{t(1+t)^n}\right\},$$

(*Elém. d'Algèbre*); quant à la somme $s$, elle se partagera entre les rentiers, suivant le nombre d'individus existans chaque année.

Lorsque la classe des rentiers est très-nombreuse, il est évident que le nombre $n$ est celui des années comprises depuis l'âge où ils font leur placement jusqu'au dernier âge marqué dans la Table de mortalité; mais dans le cas contraire, le banquier leur ferait tort, en reculant ainsi le terme de l'annuité. Saint-Cyran propose de prendre pour ce terme l'année où il y a une probabilité $\frac{1}{2}$ que tous les rentiers seront éteints; dans le cas de deux rentiers, par exemple, ce serait l'année où la quantité $ff'$ du n° 113 se réduirait à $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire le terme de la *durée probable* de l'association (*).

Si les rentiers ne devaient hériter que d'une portion du revenu des décédés, de la moitié, par exemple, le banquier aurait à payer, à la fin de la 1re année, $\left(v'+\frac{v-v'}{2}\right)=\frac{v+v'}{2}$ rentes, à la fin de la seconde, $v''+\frac{v-v''}{2}=\frac{v+v''}{2}$, et ainsi de suite; on aurait donc l'équation

$$S=\frac{s}{2v}\left\{\frac{v+v'}{1+t}+\frac{v+v''}{(1+t)^2}+\frac{v+v'''}{(1+t)^3}+\text{etc.}\right\},$$

(*) *Recherches sur les emprunts*, 2e part., pag. 48. Si on prenait cette même durée pour le terme des rentes viagères quelconques, le calcul, réduit à celui d'une annuité, deviendrait beaucoup plus simple; mais, excepté dans des cas très-rares, il donnerait toujours des rentes plus faibles que le procédé du n° 119. Sous ce rapport il conviendrait peut-être mieux au cas où il s'agit d'une seule rente; car alors le banquier s'expose beaucoup: mais pourquoi le rentier ferait-il un contrat désavantageux, quand il peut obtenir un taux plus considérable en prenant part à de nombreux placemens?

et chaque rentier toucherait les sommes $\frac{(v+v')s}{2v'}$ à la fin de la 1re année, $\frac{(v+v'')s}{2v''}$ à la fin de la 2e, etc.

125. La théorie des *caisses d'épargnes* ne diffère pas beaucoup de celle des rentes viagères sur une seule tête; et celle des caisses par le moyen desquelles on assure des pensions aux veuves, ressemble beaucoup à celle des rentes viagères sur deux têtes.

Dans les établissemens de la première espèce, chaque associé donne, soit une somme une fois payée, soit une somme annuelle, pour avoir droit à une pension dans un âge avancé, ou à des secours en cas de maladie. Il est aisé de voir que pour le premier cas, si $S$ désigne la somme donnée pour recevoir une pension $s$, après un nombre $n$ d'années, les sommes étant rapportées à l'époque du placement, on aura l'équation

$$S = \frac{s}{v}\left\{\frac{v_n}{(1+t)^n} + \frac{v_{n+1}}{(1+t)^{n+1}} + \text{etc.}\right\}.$$

Si on paie des sommes annuelles $S$, $S_1$, $S_2$, etc., il faudra substituer à $S$ la suite

$$S + \frac{v_1 S_1}{v(1+t)} + \frac{v_2 S_2}{v(1+t)^2} + \text{etc.}$$

C'est à ce cas que reviennent les retenues que l'on fait aux employés dans certaines administrations, pour leur assurer des pensions de retraite.

Si la caisse doit donner des secours en maladie, il faudra introduire dans le second membre les produits de ces sommes, réduites à la même époque et multipliées chacune par la probabilité de les délivrer. Cette probabilité doit se conclure des observations faites avec soin, sur le nombre et la durée moyenne des ma-

ladies dans la classe d'individus à laquelle la caisse est particulièrement affectée.

L'utilité de semblables établissemens est si évidente, que de simples ouvriers laborieux et économes, se sont réunis pour en former. Quoiqu'ils n'eussent pas tous les élémens nécessaires pour bien asseoir leurs calculs, et que leur petit nombre ne leur donnât pas autant d'assurance qu'une réunion plus considérable, cependant plusieurs de ces réunions ont prospéré. Toutes ont senti l'avantage qu'elles auraient à s'étendre; mais, comme on peut le voir par les intéressans rapports, qu'a fait sur ce sujet, à la Société Philantropique, M. Dupont de Nemours, presque toutes ont craint d'attirer les regards, de peur d'être atteintes par la versatilité des systèmes financiers de l'état; car ce n'est que par une grande sûreté dans les placemens, que ces caisses peuvent prospérer. L'idée de les lier avec l'administration du *Mont-de-Piété*, comme l'a proposé M. Mourgue, dans le plan qu'il a présenté à l'Institut, serait très-heureuse, si cette administration, qui peut faire l'emploi des plus petites sommes, et dont les capitaux sont dans un mouvement continuel, demeurait indépendante des fonds publics (*).

126. La forme des caisses affectées aux pensions des veuves, peut varier aussi de plusieurs manières; mais il suffit de considérer la forme la plus simple, pour pouvoir, au moyen de ce qu'on a vu dans les articles précédens, se faire une idée de la manière de traiter les autres. Que chaque homme marié donne, soit en se mariant, soit annuellement, une somme, sous la condition que s'il meurt, sa veuve recevra, soit une somme, soit une rente donnée; on exprimera facile-

(*) *Plan d'une caisse de prévoyance et de secours.*

ment les relations de ces sommes, en les réduisant toutes à la même époque, et en les multipliant ensuite par les probabilités de les payer.

Si la condition est un seul paiement à faire par chaque membre de l'association et par la caisse, il suffira de substituer au nombre $v$, dans la première équation du n° 125, le nombre $ee'$ du n° 113, calculé d'après des Tables appropriées à la classe d'individus dont il s'agit, et aux nombres $v_n$, $v_{n+1}$, etc. celui des femmes qui deviennent veuves chaque année, lequel est la différence des valeurs de $e'f$ d'une année à l'autre.

Si les paiemens sont faits annuellement, tant par les associés que par la caisse, alors c'est la seconde équation du n° 125 qu'il faut employer, en substituant aux $v$, $v_1$, $v_2$, etc., du premier membre les valeurs successives de $ee'$ (113), et aux $v_n$, $v_{n+1}$, etc. du second membre, celles de $e'f$, qui désignent le nombre de veuves existantes à la fin de chaque année.

127. Ces exposés sommaires n'ayant pour but que de faire connaître les relations des diverses manières de combiner l'intérêt de l'argent avec les chances de la mortalité, et les moyens qu'on peut employer pour résoudre les questions qui s'y rapportent, je renvoie aux auteurs qui en ont traité particulièrement, et à la tête desquels il faut placer Euler, pour son ouvrage sur les *Caisses des veuves*; mais je ne dois pas omettre de faire observer que si, dans les emprunts, l'équité exige qu'on rende aux prêteurs tout ce que leur assigne la formule de l'espérance mathématique, il n'en saurait être de même dans les caisses établies pour les épargnes, les secours, etc. Celles-ci ont des frais d'administration qui doivent être supportés par tous les membres de l'association. De plus, tant que l'association est peu nombreuse, la caisse doit prendre quelqu'avan-

tage, afin de parvenir à former un fonds qui puisse parer aux irrégularités que la succession des événemens présente par intervalles, ou bien elle risquerait de se trouver hors d'état de remplir les conditions qu'elle s'est imposées. Elle donnera donc un intérêt moins fort que le taux ordinaire, ou fera une retenue sur les sommes payées par les sociétaires. La réunion de ces bénéfices, multipliés par les probabilités qui leur correspondent, compose l'avantage du banquier, comme pour la loterie et les jeux; mais sa détermination exige encore qu'on distingue le cas où la caisse n'emploie à faire son service que les fonds qu'elle a reçus, et celui où le banquier a entrepris, à ses risques et périls, de faire ce service sur ses propres fonds, au moyen du bénéfice qu'on lui alloue.

128. C'est à ce dernier cas que se rapportent les compagnies qui assurent les marchandises et les vaisseaux, contre les risques de mer ou de guerre; les maisons, contre les incendies; la valeur des récoltes, contre les intempéries des saisons, et en général tous les genres de commerce qui dépendent d'événemens soumis au hasard. Celui qui se livre à de pareilles spéculations doit trouver dans le taux qu'il exige, premièrement une probabilité très-considérable de ne pas entamer ses fonds au-delà d'une certaine limite, afin de pouvoir continuer suffisamment sa spéculation; secondement, une probabilité assez grande d'obtenir un profit au moins égal à l'intérêt que ses capitaux lui auraient rapporté dans un placement qui ne lui eût fait courir aucun danger, plus au salaire auquel lui donne droit le travail qu'exige de lui son entreprise.

Le premier élément à déterminer ici est le risque de perte et la probabilité de succès. Il ne serait pas aisé de dire comment on s'y est pris à l'égard des

risques maritimes; car je ne sache pas qu'on ait dressé des listes exactes et long-tems continuées des vaisseaux qui se sont perdus, ou qui ont été pris dans différentes guerres. La construction et le dépouillement de ces listes exigerait beaucoup de détail, puisque dans la classification des événemens, il faudrait considérer le lieu et le tems, soit du départ, soit de l'arrivée, la force du vaisseau, celle de l'équipage. Le détail de la valeur des pertes serait encore plus considérable, puisqu'on assure non-seulement le corps du navire, mais les marchandises qu'il porte, et qu'on répond des avaries que ce corps ou ces marchandises peuvent éprouver. Il ne paraît même pas possible d'apprécier avec quelqu'exactitude cette foule de circonstances; mais il est vraisemblable que les profits du commerce maritime ayant été d'abord très-considérables, les négocians, dans la vue de se procurer des rentrées certaines, ont pu faire sur ces profits des sacrifices assez grands pour tenter des spéculateurs hardis. L'exemple des gains que ceux-ci ont faits leur a bientôt donné des concurrens; d'un autre côté, le bénéfice des marchands devenant moindre, les dangers diminuant par le perfectionnement de la navigation, les uns ont appris de l'expérience ce qu'ils devaient abandonner, et les autres ce qu'ils devaient exiger pour ne pas trop compromettre leur fortune.

Si l'on voulait appliquer aujourd'hui le calcul à ce genre d'assurances, il y aurait de grandes recherches à faire dans les ports, pour se procurer des données exactes; mais il y a tout lieu de croire qu'on n'en retirerait pas beaucoup de fruit; car l'Académie des Sciences proposa trois fois ce sujet de prix, de 1783 à 1787, et ne put rien obtenir de satisfaisant. La théorie n'était pas difficile à établir, mais les faits ont toujours man-

qué; et ensuite la considération d'un nombre fort grand de risques ayant des probabilités et des valeurs différentes, aurait rendu les calculs impraticables, à moins que l'on n'eût réduit tous les risques qui offraient quelqu'analogie, à un seul, d'une probabilité et d'une valeur moyenne, ce qui aurait été moins exact, mais ce qu'il paraît impossible d'éviter de faire, même pour les autres genres d'assurances. Il aurait fallu aussi, dans la rigueur, faire usage des formules qui donnent les probabilités *à posteriori*; mais il n'était guère moins nécessaire de sacrifier encore ce point à la brièveté.

129. En réduisant donc la question à l'état le plus simple, ne considérons que deux événemens, l'un entièrement heureux, dont la probabilité soit $e$, l'autre faisant payer par l'assureur une somme $a$ et dont la probabilité soit $f$; désignons par $p$ le nombre des vaisseaux assurés, et par $b$ la somme que l'assureur reçoit pour chacun. Cela posé, la somme des termes du développement de $(e+f)^p$, à partir du premier terme jusqu'au terme affecté de $e^{p-q}f^q$ inclusivement, donnant la probabilité que le nombre des événemens malheureux ne surpassera pas $q$ (22), si l'on étend cette somme jusqu'au terme où elle cesse d'être moindre que la probabilité à laquelle l'assureur veut arriver, de ne pas outrepasser la plus grande perte $c$ qu'il consente à éprouver, et que $q'$ représente la valeur particulière de $q$ à ce terme, $q'a-pb$ sera la plus grande perte correspondante à la probabilité fixée. En l'égalant à $c$, on aura l'équation

$$q'a-pb=c, \quad \text{d'où} \quad b=\frac{q'a-c}{p};$$

puis représentant par $g$ le gain que donne l'opération lorsque le nombre des événemens malheureux est réduit à $q''$, on formera l'équation

$$pb-q''a=g$$

dans laquelle mettant la valeur de $pb$, tirée de l'équation précédente, on aura

$$q'a - c - q''a = g, \quad \text{ou} \quad q' - q'' = \frac{c+g}{a},$$

ce qui, lorsqu'on se donnera $g$, fera connaître $q''$ par $q'$, indépendamment de $p$. Calculant alors la probabilité correspondante à la valeur de $q''$, on verra si elle donne une espérance suffisante d'atteindre au bénéfice que comporte la nature de l'entreprise.

Si cela n'était pas, on pourrait augmenter cette probabilité, en prenant pour l'exposant $p$ qui marque le nombre des vaisseaux assurés, des nombres de plus en plus grands, afin que le rapport $\frac{q'-q''}{p}$ devenant de plus en plus petit, la somme des termes compris entre celui qui est affecté de $e^{p-q'}f^{q'}$ et $e^{p-q''}f^{q''}$, et composant la différence des probabilités de perte et de gain, décroisse de plus en plus.

Pour donner aux calculs précédens toute l'exactitude dont ils sont susceptibles, il faut tenir compte de la différence des époques auxquelles, suivant le contrat d'assurance, les sommes $a$ et $b$ doivent se payer, ou, ce qui est la même chose, substituer aux lettres $a$ et $b$ les valeurs de ces sommes, réduites à la même époque. Quant à la valeur des probabilités exigées pour la perte et le gain, on la déterminerait *à posteriori*, si l'on connaissait les résultats moyens d'un assez grand nombre d'opérations suivies avec succès, ou bien *à priori*, en les comparant avec des probabilités de risques auxquels on s'expose volontairement, sur des motifs plus ou moins légers. L'un et l'autre de ces moyens ont été proposés par Condorcet, à l'article ASSURANCE, dans le *Dictionnaire de Mathé-*

*matiques de l'Encyclopédie méthodique*, et bientôt j'indiquerai les bases du second.

Après avoir discuté les intérêts de l'assureur, il faudrait s'occuper de ceux de l'assuré; mais cela me mènerait trop loin. Je me bornerai à faire observer que la propriété caractéristique des assurances est de tendre à ramener à une valeur moyenne le bénéfice de toutes les entreprises du même genre, en quelque nombre qu'elles soient; car c'est avec le gain que les *assureurs* font sur les *assurés* qui réussissent, qu'ils indemnisent ceux qui perdent : c'est donc à peu près comme si tous avaient mis leurs fonds en commun et étaient convenus de réparer, au moins dans une certaine proportion, les pertes particulières. Ainsi, à l'égard des récoltes, c'est reverser dans les cantons où elles ont souffert, une partie de l'excédant obtenu dans ceux où elles ont prospéré. Les assureurs sont les agens intermédiaires de cette association fictive, et le profit qu'ils font doit être considéré comme le salaire des fonctions qu'ils y remplissent. S'il existait un autre moyen de diviser les risques, l'assurance deviendrait superflue; et cela aurait lieu naturellement pour le négociant qui prendrait part immédiatement à un très-grand nombre d'entreprises, et le propriétaire qui aurait des possessions disséminées dans un grand nombre de cantons éloignés les uns des autres.

### *De la Probabilité des témoignages et des décisions.*

130. Le témoignage admet l'application du calcul des probabilités, lorsqu'on peut l'assimiler au jet d'un dé; ce qu'on a d'abord essayé de faire en supposant que, sur un nombre donné de dépositions, le même témoin dit ou rencontre un même nombre de fois la vérité. Nous commencerons par tirer les principales con-

séquences de cette hypothèse, dont nous discuterons ensuite la convenance avec le sujet.

Soit $v$ le nombre des cas dans lesquels le témoin dit vrai, $m$ celui des cas contraires; la probabilité de la vérité de sa déposition sera $\frac{v}{v+m}$, et la probabilité contraire $\frac{m}{v+m}$.

Supposons qu'un autre témoin, pour lequel les nombres analogues aux précédens soient $v'$ et $m'$, dépose du même fait, les probabilités pour et contre la vérité de son témoignage étant $\frac{v'}{v'+m'}$ et $\frac{m'}{v'+m'}$, on aura, avant que les dépositions soient connues, les probabilités

$$\frac{vv'}{(v+m)(v'+m')}, \quad \frac{mm'}{(v+m)(v'+m')} \quad (16),$$

que les témoins s'accorderont, soit pour dire vrai, soit pour mentir, et les probabilités

$$\frac{vm'}{(v+m)(v'+m')}, \quad \frac{mv'}{(v+m)(v'+m')},$$

qu'ils se contrediront, le premier déposant la vérité, le second mentant, et *vice versâ*.

Quand les dépositions seront connues et qu'elles s'accorderont, il n'y aura que les deux premiers événemens indiqués ci-dessus qui seront possibles; on aura donc les probabilités

$$\frac{vv'}{vv'+mm'} \quad \text{et} \quad \frac{mm'}{vv'+mm'} \quad (13),$$

que l'accord des témoins sera en faveur de la vérité ou bien pour le mensonge.

S'ils se contredisent, les deux derniers événemens devenant alors les seuls possibles, il en résultera les probabilités

$$\frac{vm'}{vm'+mv'}, \quad \frac{mv'}{vm'+mv'},$$

que la vérité sera dans la déposition du premier témoin, ou dans celle du second.

131. Il est facile d'étendre ces dernières formules à un nombre quelconque de témoins; et si on assigne à leur témoignage la même probabilité, en posant $v = v' =$ etc., $m = m' =$ etc., que $p$ soit le nombre de ces témoins et qu'ils s'accordent, il en résultera pour la vérité du fait déposé, la probabilité $\frac{v^p}{v^p+m^p}$, et $\frac{m^p}{v^p+m^p}$ pour le contraire.

En divisant les deux termes de la première fraction par $v^p$, sa nouvelle forme $\frac{1}{1+\frac{m^p}{v^p}}$, fera voir qu'elle augmente avec $p$ lorsque $v > m$, et qu'elle décroît si $v < m$; que par conséquent, lorsque les témoins mentent ou se trompent plus souvent qu'ils ne disent la vérité, plus ils sont nombreux et moins la concordance de leurs dépositions a de poids.

S'ils se contredisent, et que sur la totalité il y en ait $p$ affirmant et $q$ niant le même fait, la probabilité que les premiers disent vrai sera

$$\frac{v^p m^q}{v^p m^q + m^p v^q}, \text{ et sa contraire, } \frac{m^p v^q}{v^p m^q + m^p v^q}.$$

En divisant les deux termes de ces fractions par $v^q m^q$, on les change en

$$\frac{v^{p-q}}{v^{p-q}+m^{p-q}} \quad \text{et} \quad \frac{m^{p-q}}{v^{p-q}+m^{p-q}},$$

qu'on obtiendrait pour les probabilités correspondantes à l'accord de $p-q$ témoins; la valeur de la déposition se réduit donc, dans ce cas, à celle d'une déposition unanime faite par un nombre de témoins égal à l'excès du nombre de ceux qui affirment sur celui de ceux qui nient.

132. Lorsqu'une personne rapporte ce qu'elle tient d'une autre, que cette autre avait reçu d'une autre, et ainsi de suite, cette sorte de témoignage, qui s'appelle *tradition*, donne lieu à toutes les combinaisons indiquées au commencement du nº 130; car dans la chaîne de témoins qui ont déposé successivement du fait, le dernier étant seul entendu par la personne qui prend l'information, laisse douter si celui qui le précède a dit ou non ce qu'il lui fait dire, et en même tems si cette première déposition était une vérité ou un mensonge. En ne considérant donc que deux personnes dans la chaîne des témoins, il en résulte les quatre probabilités exprimées dans le nº cité.

Les deux dernières correspondent évidemment à la fausseté de la tradition, puisque l'un des deux témoins a menti. Mais s'il s'agissait de témoignages rendus par *oui* ou par *non*, de propositions entièrement contradictoires, alors la deuxième probabilité, qui suppose que les deux dépositions successives auraient été fausses, répondrait à la vérité, aussi bien que la première, qui les suppose vraies. En effet, le premier témoin ayant dit *oui* lorsqu'il fallait dire *non*, le second, qui rapporte le contraire de ce qu'il tient effectivement du premier, prononce *oui*, c'est-à-dire la vérité : on aurait donc dans ce cas, pour la vérité de la tradition,

la probabilité

$$\frac{vv'+mm'}{(v+m)(v'+m')}, \text{ et sa contraire, } \frac{vm'+mv'}{(v+m)(v'+m')} \ (*).$$

La première de ces probabilités surpasse toujours la seconde, lorsque l'on a en même tems

$$v > m, \quad v' > m', \quad \text{ou} \quad v < m, \quad v' < m';$$

car la différence des numérateurs est

$$vv' + mm' - vm' - mv' = (v-m)(v'-m'),$$

produit positif quand ses deux facteurs sont de même signe.

133. Si la chaîne traditionnelle se compose d'un nombre quelconque $p$ de témoins, et que les dépositions de chacun aient une égale probabilité, les diverses combinaisons de la vérité et de l'erreur seront données par le développement de

$$(v+m)^p = v^p + \frac{p}{1} v^{p-1}m + \frac{p(p-1)}{1.2} v^{p-2}m^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} v^{p-3}m^3 + \text{etc.},$$

dans lequel tous les termes où l'exposant de $m$ est pair, indiquant un nombre pair de mensonges successifs, devront être pris en faveur de la vérité de la

(*) Ce cas singulier a été remarqué par M. P. Prevost, professeur de philosophie à Genève, dans ses leçons sur le calcul des probabilités, où il a distingué les témoignages en *simultanés* ou *oculaires* et *successifs* ou *traditionnels*. Voyez le 2ᵉ volume de ses *Essais de Philosophie*, pag. 86, et un Mémoire qui lui est commun avec M. l'Huillier, et qui est inséré dans ceux de l'*Académie de Berlin*, année 1797, pag. 131. C'est de ce dernier écrit que j'ai extrait en grande partie cet article et les deux suivans.

tradition, si les dépositions ne peuvent varier que contradictoirement. Sa probabilité sera donc

$$\frac{v^p + \frac{p(p-1)}{1.2} v^{p-2}m^2 + \text{etc.}}{(v+m)^p},$$

et la probabilité contraire,

$$\frac{\frac{p}{1} v^{p-1}m + \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} v^{p-3}m^3 + \text{etc.}}{(v+m)^p}.$$

On simplifie beaucoup ces expressions, en observant que le numérateur de la première équivaut à

$$\frac{(v+m)^p + (v-m)^p}{2},$$

et celui de la seconde à

$$\frac{(v+m)^p - (v-m)^p}{2};$$

parce qu'elles deviennent alors respectivement

$$\frac{(v+m)^p + (v-m)^p}{2(v+m)^p} = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{v-m}{v+m}\right)^p\right\},$$

$$\frac{(v+m)^p - (v-m)^p}{2(v+m)^p} = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{v-m}{v+m}\right)^p\right\}.$$

134. Les deux espèces de témoignages que nous avons considérées précédemment peuvent se combiner. Par exemple, un nombre $p$ de témoins déposent chacun séparément sur un fait qu'ils tiennent d'un individu qui l'a vu : alors la probabilité que les témoins rapportent fidèlement ce que celui-ci leur a dit, est,

s'ils sont unanimes,

$$\frac{v^p}{v^p+m^p} \text{ (131), et sa contraire, } \frac{m^p}{v^p+m^p}.$$

Supposant que la probabilité du témoignage de celui qui a vu le fait soit aussi $\frac{v}{v+m}$, la contraire $\frac{m}{v+m}$, la probabilité de la vérité de la déposition finale sera

$$\frac{v^{p+1}}{(v^p+m^p)(v+m)},$$

si l'on ne doit y admettre que des témoignages conformes à la vérité, et

$$\frac{v^{p+1}+m^{p+1}}{(v^p+m^p)(v+m)},$$

quand deux mensonges successifs équivalent à la vérité.

Si le même fait était transmis par plusieurs chaînes de traditions distinctes, composées chacune d'un nombre $p$ de dépositions successives, dont la dernière seule ait été entendue par celui qui prend l'information, on aurait d'abord, par chaque chaîne en particulier, pour la vérité et pour l'erreur, les probabilités

$$\frac{(v+m)^p+(v-m)^p}{2(v+m)^p} \text{ et } \frac{(v+m)^p-(v-m)^p}{2(v+m)^p} \text{ (133)};$$

en les désignant par $V$ et $M$, nommant $q$ le nombre des chaînes de dépositions, et supposant qu'elles soient unanimes, il en résulterait une probabilité

$$\frac{V^q}{V^q+M^q}$$

en faveur de la vérité du fait énoncé.

La marche de cette expression dépend du rapport de $v$ à $m$; et pour la déterminer, il faut d'abord observer que celle de $M$ est contraire à celle de $V$, puisque $V+M=1$, qu'ensuite, lorsque $v=m$, on a $V=M=\frac{1}{2}$, et que cette valeur est une limite vers laquelle tendent, dans tous les autres cas, ces quantités à mesure que $p$ augmente. La première est toujours $>\frac{1}{2}$ quand $v$ surpasse $m$; mais si le contraire a lieu, il en résultera $V<\frac{1}{2}$ ou $>\frac{1}{2}$, selon que $p$ sera impair ou pair. Ce changement singulier, que produit l'addition d'un seul témoin à une chaîne d'ailleurs aussi nombreuse qu'on le voudra, vient du double témoignage erroné, compté comme vrai (132).

135. Nous avons supposé jusqu'ici que les dépositions étaient entièrement vraies ou entièrement fausses, ce qui n'a réellement lieu que lorsque l'information est réduite à des interrogations simples, auxquelles on ne peut répondre que *oui* ou *non*. C'est à ce point qu'il faut toujours tâcher de les ramener, en analysant les énoncés; mais quand la chose n'est pas possible, on doit distinguer plus de deux sortes de témoignages. Lambert, qui s'en est occupé dans son *Novum Organon*, les a classés en *vrais*, *insignifians* ou *nuls*, et *faux*.

Si l'on prend toujours le dé pour emblême, cela revient à supposer qu'il a trois sortes de faces, et qu'en conséquence on doit embrasser dans chaque épreuve un pareil nombre d'événemens possibles. Les formules relatives à ce cas (51) résolvent toutes les questions analogues aux précédentes; mais le calcul devient trop long pour trouver place dans ce Traité.

136. Quand on considère combien de faits extraordinaires ont été reconnus faux, quoiqu'appuyés sur des témoignages multipliés ou d'une autorité imposante, on est porté, toutes choses d'ailleurs égales, à

donner d'autant moins de confiance aux dépositions, que les faits qu'elles attestent s'écartent plus de ce qui se passe habituellement sous nos yeux. En effet, si, lorsqu'il s'agit de tels faits, le nombre de mensonges ou d'erreurs est dans un rapport beaucoup plus grand avec le nombre total des dépositions, que lorsqu'il s'agit de faits compris dans l'ordre constamment observé, le poids du témoignage ne doit pas être le même pour les premiers que pour les derniers ; la forme du dé doit changer avec la nature du fait : mais c'est encore ici une de ces circonstances dont j'ai parlé dans le n° 69, où l'on cherche à donner au calcul une forme qui rapproche ses résultats des aperçus du bon sens. On voit bien qu'il faut substituer au rapport constant par lequel on représente la probabilité du témoignage, suivant l'hypothèse du n° 130, une expression qui le fasse décroître avec la vraisemblance propre du fait attesté ; mais on ne trouve pas dans la nature du sujet, des conditions assez étroites pour établir une relation précise entre ces deux élémens. On s'est arrêté à regarder la probabilité propre du fait comme représentant celle d'un second témoignage recueilli concurremment avec le premier, ce qui donne pour cette déposition, les probabilités

$$\frac{vv'}{vv'+mm'}, \quad \frac{mm'}{vv'+mm'} \ (130),$$

en supposant que la probabilité propre du fait soit $\frac{v'}{v'+m'}$, et sa contraire $\frac{m'}{v'+m'}$ (*).

Si ce fait est, par exemple, l'extraction d'une boule blanche, d'une urne qui ne contient que cette boule

(*) C'est ce qu'a fait Condorcet, *Mém. de l'Acad. des Sciences*, ann. 1783, p. 553.

mêlée avec 999 999 boules noires, on aura

$$v' = 1, \quad m' = 999\,999,$$

et la probabilité favorable au témoignage sera réduite à

$$\frac{v}{v + 999\,999 m}.$$

137. M. Laplace, considérant à part la probité du témoin et son intelligence, exprime séparément la probabilité que le témoin dit ce qu'il a vu ou entendu, et celle qu'il a bien vu ou bien entendu (*). De là résultent, sur sa déposition, les quatre hypothèses suivantes :

1°. Il connaît la vérité, } et veut dire la vérité ;
2°. ou il est dans l'erreur, }

3°. il connaît la vérité, } et veut mentir.
4°. ou il est dans l'erreur, }

La dernière comprend un cas semblable à celui du double témoignage erroné (132), puisqu'en cherchant à tromper sur cette vérité qu'il ne connaît pas, le témoin peut la rencontrer; et en effet, ce qui précède revient à faire du témoin deux personnes, dont l'une, toujours véridique, est susceptible d'erreur dans un certain rapport, et dont l'autre, qui ne peut se tromper, déguise plus ou moins souvent la vérité. Combinant les deux témoignages successifs avec la probabilité propre du fait, M. Laplace calcule la probabilité de chaque hypothèse, et divise par la somme de toutes ces probabilités, la somme de celles qui sont pour la vérité de la déposition.

(*) *Théorie analytique des Probabilités*, p. 446.

En nommant, avec lui, $p$ la probabilité que le témoin veut dire la vérité, $r$ la probabilité qu'il l'a saisie, et $\frac{1}{n}$ celle du fait rapporté, qui est ici l'extraction du numéro $i$, d'une urne qui en contient $n$, on aura pour la vérité, dans la première hypothèse, la probabilité $\frac{pr}{n}$.

Dans la seconde, où le numéro $i$ n'est pas sorti, la probabilité de cet événement est $\frac{n-1}{n}$, et celle de l'erreur du témoin est $1-r$; cependant il n'en faut pas conclure que la probabilité composée soit .... $p(1-r)\frac{n-1}{n}$, parce que la non sortie du numéro $i$ n'est pas tout l'événement arrivé, il y a encore le faux apperçu du numéro $i$ parmi tous ceux qui ne sont pas sortis, illusion dont la probabilité est $\frac{1}{n-1}$. En ayant égard à cette circonstance, la probabilité de l'événement devient $\frac{n-1}{n}\times\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}$, et celle de l'hypothèse, $\frac{p(1-r)}{n}$.

Dans la troisième, il faut combiner ensemble les probabilités $1-p$ que le témoin ment, $r$ qu'il connaît la vérité, et $\frac{1}{n}$ celle qui résulte de la non sortie du numéro $i$, et du choix qu'en fait le témoin; on a pour résultat $\frac{(1-p)r}{n}$.

Dans la quatrième hypothèse, $(1-p)(1-r)$ est la probabilité propre du témoignage, puisque le témoin ment et ne connaît pas la vérité; mais l'événement

peut être la sortie ou la non sortie du numéro $i$. La probabilité du premier cas est $\frac{1}{n}$; le témoin croyant un autre numéro sorti, fera toujours le choix de son énoncé parmi $n-1$ numéros seulement; la probabilité que ce choix tombera sur $i$ sera par conséquent $\frac{1}{n-1}$; et comme ce choix doit concourir avec la sortie du numéro $i$, la probabilité de l'événement sera $\frac{1}{n(n-1)}$, celle de ce cas du témoignage, $\frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}$; et il ne faut pas oublier qu'il est en faveur de la vérité.

Si on ne le distingue pas de tous ceux qui sont compris dans la dernière hypothèse, l'opinion du témoin portant toujours sur la sortie d'un numéro qui n'est pas $i$, aura une probabilité $\frac{n-1}{n}$; la probabilité qu'il choisira celui-là parmi les $n-1$ numéros qu'il croit n'être pas sortis, sera $\frac{1}{n-1}$; et la probabilité de l'événement sera par conséquent encore $\frac{1}{n}$; ainsi la probabilité de l'hypothèse sera $\frac{(1-p)(1-r)}{n}$.

On aura donc enfin

$$\frac{\frac{pr}{n}+\frac{(1-p)(1-r)}{n(n-1)}}{\frac{pr}{n}+\frac{p(1-r)}{n}+\frac{(1-p)r}{n}+\frac{(1-p)(1-r)}{n}}=pr+\frac{(1-p)(1-r)}{n-1}$$

expression qui se réduit à $p$, si $r=1$, c'est-à-dire,

si le témoin n'est pas susceptible de se tromper, et qui diminue à mesure que $n$ augmente.

Peut-être dans cette question pourrait-on avoir quelque doute sur la nécessité de faire entrer dans le calcul la probabilité du choix que le témoin fait d'un numéro autre que celui qu'il sait ou qu'il croit être sorti; et comment d'ailleurs déterminer séparément les probabilités $r$ et $p$? Il est donc difficile de croire que la formule ci-dessus serve autrement que comme un exemple des considérations ingénieuses que peut fournir le sujet qui nous occupe. Je rapporterai encore, dans cette vue, la question suivante tirée du même ouvrage.

138. Soient *deux urnes* A *et* B, *la première contenant* n *boules blanches, et la seconde* n *boules noires; on a tiré de l'une de ces urnes, on ignore de laquelle, une boule qui a été mise dans l'autre, et ensuite on a tiré une boule de cette dernière. Deux témoins, dont l'un n'a vu que le premier tirage, et l'autre que le second, affirment qu'il en est sorti une boule blanche; quelle est la probabilité de ce fait?* La difficulté se trouve ici dans l'ensemble des deux témoignages; car chacun en particulier n'affirme qu'une chose très-possible, puisque l'une des deux urnes ne renfermant que des boules blanches, si l'on ne considère qu'un seul tirage, la probabilité que la boule a été prise dans cette urne est $\frac{1}{2}$. Mais si l'on suppose que le premier tirage ait eu lieu dans l'urne $A$, le deuxième ayant nécessairement lieu dans l'urne $B$, qui ne contient de boule blanche que celle qui est sortie de l'urne $A$, la seconde apparition de cette boule devient d'autant moins probable que le nombre des boules noires est plus grand; et ce cas est le seul dans lequel les témoignages puissent être vrais tous deux.

Soient donc $q$ et $q'$ les probabilités de la véracité

de chaque témoin en particulier, et évaluons celle des diverses hypothèses que le sujet présente. 1°. C'est l'urne $A$ qui a fourni le premier tirage : $\frac{1}{2}$ étant la probabilité de ce fait, $q$ celle que le témoin dit vrai, la probabilité de la déposition est $\frac{q}{2}$; mais l'urne $B$ lorsqu'on y fait le second tirage, contenant $n+1$ boules, dont une blanche, la probabilité du fait attesté par le second témoin est $\frac{1}{n+1}$; celle qu'il dit la vérité étant $q'$, $\frac{q'}{n+1}$ exprime la probabilité de sa déposition, et $\frac{qq'}{2(n+1)}$ celle de la vérité de leur accord.

2°. Si le 2[e] témoin ment, la boule sortie de l'urne $B$ était noire; alors la probabilité $\frac{n}{n+1}$ de cette sortie, combinée avec $(1-q')$, probabilité du mensonge du 2[e] témoin, donnera pour la fausseté de sa déposition, $\frac{(1-q')n}{n+1}$, et pour la vérité de l'hypothèse, $\frac{q(1-q')n}{2(n+1)}$.

3°. Si le 1[er] témoin ment, la première boule était noire et sortait nécessairement de l'urne $B$; la probabilité de cette partie de l'hypothèse est $\frac{1}{2}(1-q)$. Alors le second tirage s'étant fait dans l'urne $A$, qui renfermait $n$ boules blanches et 1 seule noire, la probabilité de la sortie d'une boule blanche sera $\frac{n}{n+1}$, celle de la déposition du second témoin $\frac{q'n}{n+1}$, et celle de l'hypothèse $\frac{(1-q)q'n}{2(n+1)}$.

4°. Si le 2e témoin ment aussi, la boule sortie de l'urne $A$ au 2e tirage était noire, la probabilité de cette sortie étant alors $\frac{1}{n+1}$, celle de la probabilité de cette partie de l'hypothèse sera $\frac{1-q'}{n+1}$, et celle de toute l'hypothèse $\frac{(1-q)(1-q')}{2(n+1)}$.

La probabilité relative de la première hypothèse, la seule qui rende les deux témoignages vrais, sera donc

$$\frac{qq'}{qq'+q(1-q')n+(1-q)q'n+(1-q)(1-q')}$$

et diminuera à mesure que $n$ augmentera. Si l'on fait

$$q=q'=\frac{9}{10},\ n=1\,000\,000,$$

on obtiendra la très-petite fraction $\frac{81}{18\,000\,082}$.

139. La discussion des témoignages touchant à des matières sur lesquelles on avait pris d'avance un parti, il est arrivé que plusieurs auteurs ont arrangé le calcul pour le résultat qu'ils voulaient, ou qu'ils avaient besoin de trouver. Ce n'est qu'ainsi, du moins, qu'on peut expliquer la théorie des témoignages simultanés, publiée sans nom d'auteur, dans le n° 256 des *Transactions Philosophiques* (p. 359, année 1699), le plus ancien écrit que je connaisse sur ce sujet, et qui a été adoptée par Bicquilley, dans son traité *Du Calcul des Probabilités* (en 1783). Effrayé sans doute pour le but qu'il voulait atteindre, de la rapidité avec laquelle diminue la probabilité de ces témoignages lorsque l'on combine entr'elles, comme on le doit, les chances de chaque témoignage, et que sa probabilité propre est au-dessous

de $\frac{1}{2}$ (131), l'auteur anglais avance que lorsqu'un premier témoin a déposé d'un fait, sa confirmation par un second témoin détruit toujours une partie de l'incertitude qu'a laissée le premier, et diminue en conséquence la probabilité contraire, d'une partie proportionnelle à la probabilité de la seconde déposition. Par exemple, si $\frac{2}{3}$ exprime la probabilité du premier témoignage, $\frac{1}{4}$ celle du second, celui-ci ajoutera à la première $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3}$, et l'on aura en conséquence, pour l'ensemble des deux témoignages, la probabilité

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{9}{12},$$

tandis que suivant les formules du n° 130, elle ne serait que $\frac{2}{5}$.

En raisonnant de même sur un nombre quelconque de témoignages où les probabilités de l'erreur seraient $n$, $n'$, $n''$, etc., on trouvera pour celle de la vérité

$1 - n + n(1 - n') = 1 - nn'$, par 2 témoignages,
$1 - nn' + nn'(1 - n'') = 1 - nn'n''$, par 3,
etc.

expressions dont les valeurs forment une suite croissante quelles que soient les probabilités $n$, $n'$, etc., et desquelles il résulte par conséquent, que la probabilité d'un fait croît toujours avec le nombre des témoins oculaires. Cette conclusion peut être commode dans certains cas, mais elle suffit aussi pour montrer la fausseté de l'hypothèse; car il ne faut qu'un peu réfléchir pour se convaincre de la difficulté et presque de l'impossibilité où sont des spectateurs ignorans et nombreux, de ne pas se tromper sur l'apparence des faits extraordinaires.

Lorsque les faiseurs de tours opèrent adroitement, et qu'on fait abstraction de la défiance que doivent inspirer à des esprits éclairés les apparences contraires à l'expé-

rience de tous les jours, aucun des spectateurs a-t-il pour ne pas croire à la réalité des prodiges qu'on lui présente, d'autre motif que le but et la forme du spectacle? qu'au lieu des circonstances qui avertissent de l'illusion, un sérieux solennel accompagne ces prétendus prodiges; qu'ils soient attribués à un pouvoir surnaturel; qu'ils tendent à exciter l'enthousiasme, à caresser le goût que le vulgaire a pour ce qui sort des voies ordinaires de la nature, ou pour trancher les difficultés devant lesquelles la raison est forcée de s'arrêter : il est bien certain que plus les témoins seront nombreux, plus la probabilité de l'erreur augmentera. Hume l'a bien prouvé, les prodiges sont très-difficiles, pour ne pas dire impossibles à constater (*). Ce n'est pas que les phénomènes les plus répétés dans la nature, vus une première fois, ne puissent passer pour des prodiges, et qu'il soit conforme à la saine raison de faire des bornes de notre expérience la limite du possible; mais aussi n'est-ce pas la première apparition de ces phénomènes qui en constate l'existence. Long-tems on a nié, et avec raison eu égard au caractère des relations, au but des narrateurs, la chute des pierres tombées du ciel. Cet exemple très-récent de la manière dont un fait extraordinaire finit par prendre place au nombre des réalités, prouve bien que c'est par des observations successives, particulières, et par des discussions désintéressées que la vérité s'établit. Si, lorsque le géomètre Fatio de Duillier, égaré par un enthousiasme fanatique, entreprit publiquement à Londres de ressusciter un mort (en 1707), il eût été de mauvaise foi, qu'il eût pris ses mesures en conséquence de son but, et qu'il eût été moins surveillé par la police du gouvernement, à coup sûr il n'aurait pas manqué son prodige. La liqué-

(*) *Essais philosophiques, sur les Miracles.*

faction du sang de saint Janvier à Naples, a toujours de nombreux témoins qui voient quelque chose de solide en apparence, devenir coulant; mais qu'est-ce qui établit que cette masse est du sang coagulé, que c'est celui de saint Janvier, et que son changement d'état n'est pas un effet chimique? Les prodiges opérés dans les temples des Payens, qui précédaient ou accompagnaient les oracles, et dont quelques-uns ont été reproduits sous nos yeux par l'art du ventriloque, étaient dans l'antiquité des faits appuyés sur une multitude de témoignages. Aussi voit-on que des hommes, d'ailleurs d'un grand sens, paraissent y donner une entière croyance, et que dans les débats de la religion chrétienne avec les anciens cultes, le plus souvent on accorde de part et d'autre la réalité des miracles, on ne diffère que sur les êtres auxquels on les attribue (*).

Plus tard, en recueillant les témoignages de ceux qui ont vu des revenans, qui ont eu une part active ou passive à des opérations magiques, des sortiléges, n'en trouverait-on pas plus qu'il n'en faut pour donner à ces chimères une très-grande probabilité? et elles étaient tellement conformes alors aux habitudes de l'esprit, qu'on y croyait sur les plus légers indices.

140. Si donc l'hypothèse du n° 130, adoptée par les géomètres les plus célèbres, qui ont traité ce sujet, ne répond pas exactement à toutes les circonstances qu'il présente, ce n'est pas parce qu'elle accorde trop peu de poids au témoignage, mais bien parce que ce sujet ne saurait se prêter au calcul à cause que la véracité et la sagacité des hommes, quand ils sont fortement agités, éprouvent des changemens brusques, et principalement lorsqu'il s'agit de faits merveilleux. Outre que ces faits

(*) *Voyez* dans Tacite (*Hist. lib. iv, cap.* 81.) le miracle opéré par Vespasien dans Alexandrie, et le *Traité d'Origène contre Celse*.

offrent plus de causes d'illusions que les autres, notre penchant à l'enthousiasme, nous rend peu capables de les examiner ; et par eux-mêmes, ou par les suggestions du charlatanisme, ils se lient presque toujours à de grands intérêts qui nous préoccupent fortement ou qui font taire la voix de notre conscience.

Cependant, sans recourir à des hypothèses plus ou moins compliquées, la lecture de l'Histoire suffit pour nous faire apprécier le peu de confiance que mérite le témoignage, lorsqu'il tend à établir des faits contraires à l'ordre accoutumé de la nature, puisque les prodiges si multipliés dans les tems d'ignorance, diminuent avec l'accroissement des lumières, qui, ramenant l'esprit de doute et d'examen, rend très-difficiles, ou au moins très-peu durables, les illusions si fréquentes lorsque les sciences sont encore dans l'enfance. On ne peut pas assigner des nombres précis pour les degrés de valeur du témoignage dans chaque circonstance; mais comme en parcourant les tems et les lieux on voit les prodiges les plus accrédités reconnus pour faux, et remplacés par d'autres qui ont bientôt à leur tour le même sort, on peut dire que plus on embrasse de tems et d'espace, plus on reconnaît la faiblesse de la probabilité de ce genre de faits, et que la constance des lois de la nature, dont les voyages et les découvertes scientifiques nous apportent chaque jour de nouvelles preuves, doit servir de base à tous nos jugemens.

Cet affaiblissement du témoignage avec le tems, n'a rien de commun avec l'oubli dans lequel tombent à la longue les faits simples confiés à la seule mémoire des hommes, ou à des monumens que la vétusté et les révolutions détruisent assez promptement, parce qu'ils sont peu multipliés. Les données manquent pour soumettre au calcul cette perte des souvenirs ; mais l'art de l'impri-

merie l'a prodigieusement diminuée ; et tant que les ouvrages où sont consignées les discussions profondes ou piquantes, qui classent suivant leur véritable importance, les faits et les opinions dont se composent les sciences et la philosophie, subsisteront, il sera impossible de ressusciter d'une manière durable les anciennes erreurs, ou d'en établir de nouvelles (*).

141. Les décisions rendues à la pluralité des voix, par des assemblées ou des tribunaux, ont un grand rapport avec les témoignages et peuvent être également soumises au calcul des probabilités, si l'on suppose que les habitudes de l'esprit de chaque votant soient assez constantes pour qu'il y ait toujours le même rapport entre le nombre des votes, où il prononce conformément à la vérité, et celui des votes où il se trompe ; ensorte que $v$ désignant le premier de ces nombres, et $m$ le second, la probabilité de la vérité d'un vote soit

$$\frac{v}{v+m}, \text{ et sa contraire } \frac{m}{v+m}.$$

Les différens termes du développement de $(v+m)^p$ indiqueront toutes les combinaisons suivant lesquelles pourront se partager, entre la vérité et l'erreur, un nombre $p$ de votans supposés également probes et également éclairés : ainsi le terme général

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots q}\, v^{p-q}\, m^q,$$

(*) C'est en confondant les effets du progrès des lumières avec l'affaiblissement de la tradition, que Craig eut la bizarre idée d'appliquer le calcul à la théologie, afin d'assigner la durée du christianisme, d'après l'affaiblissement graduel des témoignages sur lesquels il est fondé, et trouvait pour cette durée 1454 ans, à partir de 1699. Au bout de ce terme un second avènement de J. C. et une seconde révélation devaient rétablir la foi dans toute sa force. (Voy. *Theologiæ christianæ Principia mathematica.*)

exprimant le nombre de combinaisons dans lesquelles il y a $p-q$ votes pour la vérité et $q$ pour l'erreur, la probabilité de ce partage sera

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots q}\,\frac{v^{p-q}\,m^q}{(v+m)^p}.$$

Si l'on demande la probabilité que la décision sera rendue à l'unanimité sans distinguer les votes pour la vérité de ceux qui sont pour l'erreur, on aura

$$\frac{v^p+m^p}{(v+m)^p}.$$

Lorsque la décision est portée et qu'on sait le nombre des votans qui ont été pour et de ceux qui ont été contre, il ne faut plus alors faire entrer dans la probabilité cherchée, que les combinaisons qui s'accordent avec ces données; et on trouve, comme dans le n° 131, que la probabilité de la vérité d'une décision rendue à l'unanimité par un nombre $p$ de votans, est

$$\frac{v^p}{v^p+m^p},$$

et seulement

$$\frac{v^{p-q}}{v^{p-q}+m^{p-q}},$$

lorsque $p$ sont pour cette décision et $q$ contre, ou qu'elle n'a obtenu que la pluralité $p-q$. De plus, les remarques faites sur la marche de ces probabilités, lorsqu'il s'agissait des témoignages (131), ont également lieu pour les décisions, et s'accordent avec le bon sens, en indiquant qu'on doit attendre la justesse des décisions, plutôt des lumières que du nombre des votans.

142. En supposant qu'ici, comme dans tous les autres

genres de hasard, les événemens, quand ils sont très-répétés, manifestent des rapports fort approchans de leur probabilité, on peut déterminer le rapport des nombres $v$ et $m$, lorsque l'on connaît dans une longue suite de décisions le rapport du nombre total au nombre de celles qui ont été portées à l'unanimité, et le nombre des votans qu'on suppose avoir toujours été le même ; car si l'on désigne ce rapport par $\frac{r}{n}$, on aura sensiblement

$$\frac{v^p + m^p}{(v+m)^p} = \frac{r}{n}.$$

Ce moyen a été proposé par M. Laplace (*); et en faisant pour abréger

$$\frac{v}{v+m} = e, \quad \text{d'où } \frac{m}{v+m} = 1 - e$$

on en tire l'équation

$$e^p + (1-e)^p = \frac{r}{n},$$

qui fera connaître la valeur de la probabilité $e$. Cette équation, qui ne monte qu'au 2^e^ degré quand $p = 3$, donne alors $e = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4r-n}{12n}}$; et si l'on suppose que la moitié des décisious ait été portée à l'unanimité, ou que $\frac{r}{n} = \frac{1}{2}$, on en déduit $e = 0,789$ : c'est la probabilité de la vérité de chaque vote, d'après l'hypothèse établie.

Tirant ensuite de l'équation ci-dessus la valeur de $e^p$, pour la substituer dans la formule

$$\frac{v^p}{v^p + m^p} = \frac{e^p}{e^p + (1-e)^p}$$

(*) *Théorie analytique des Probabilités*, pag. 460.

qui exprime la probabilité de la vérité d'une décision rendue à l'unanimité, on obtiendra

$$1 - \frac{n}{r}(1 - e)^p;$$

on aurait pu également éliminer $(1 - e)^p$ au lieu de $e^p$.

Ces formules sont très-simples; mais elles supposent constant le rapport $\frac{v}{m}$, hypothèse qui paraît d'abord inadmissible pour un long espace de tems, pendant lequel les principes politiques, administratifs et judiciaires varient avec l'état des lumières, et les opinions adoptées sur les droits communs à tous les hommes, ou particuliers à certaines classes de la société, et qui même ne peut avoir lieu quand ces circonstances n'auraient pas changé.

143. En effet la formule

$$\frac{v^{p-q}}{v^{p-q} + m^{p-q}}$$

présente une conséquence que le bon sens rejette. Elle demeure la même tant que le nombre $p - q$ ne change pas, quel que soit d'ailleurs $p + q$ qui exprime celui des votans, en y faisant, par exemple, $p = 25$, $q = 10$, ou bien $p = 220$, et $q = 205$. Dans ces deux cas, la majorité $p - q$ est également de 15 voix; mais on ne pourra s'empêcher d'attacher bien plus de confiance à la première décision qu'à la seconde, parce qu'on est porté à estimer le poids de la majorité des suffrages, non par leur nombre absolu, mais par le rapport de ce nombre avec celui des votans (*).

En cherchant à se rendre compte de l'exception que

(*) *Essai sur la Probabilité des Décisions*, p. 242.

fait ici la raison naturelle à une déduction rigoureuse du calcul, il faut reconnaître, avec Condorcet, que cette diminution de confiance porte alors sur la probabilité de la vérité de chaque vote, probabilité qu'on regarde comme plus petite quand la décision est rendue à une faible pluralité que dans le cas contraire, ce qui peut tenir à la difficulté particulière de la question à décider. Par là on rentre dans les principes généraux sur lesquels le calcul et le bon sens s'accordent; car le plus grand terme du développement de $(v + m)^p$ étant celui où les exposans des lettres $v$ et $m$ sont dans le rapport de ces nombres, ou s'en approchent le plus (27), ces exposans indiquent la division des votes la plus probable dans une assemblée, et toute autre l'est d'autant moins, qu'elle s'écarte plus de celle-là.

Une longue suite de décisions portées par les mêmes votans, sur des questions de même genre, à une pluralité à peu près constante, ferait donc connaître les limites du partage le plus probable des votes, et conduirait à des valeurs approchées du rapport des nombres $v$ et $m$; mais ce moyen de le déterminer n'est guère plus praticable que celui du n° 142. La révision des décisions anciennes, par un nombre suffisant de personnes très-éclairées et dégagées de tout intérêt relatif à ces décisions et aux votans qui les ont rendues, donnerait sans doute des lumières importantes, si le travail de cette révision n'était pas à peu près impossible à exécuter, ou parce que les matériaux manquent, ou bien parce qu'ils sont trop multipliés et trop obscurs.

144. Quoi qu'il en soit, cette nécessité de regarder la probabilité de la vérité de chaque vote, comme pouvant varier même dans l'état de choses le plus ordinaire, oblige de substituer aux expressions des probabilités *à priori*, celles des probabilités *à posteriori;* et par ce

moyen Condorcet trouve, en effet, que la probabilité d'une décision doit diminuer quand le nombre des votans augmente, et que la pluralité reste la même. Nous n'indiquerons qu'une seule des hypothèses qu'il examine, celle à laquelle il s'arrête. Ayant reconnu qu'on ne pouvait arriver avec quelque apparence d'exactitude, qu'à une probabilité assez considérable que celle de la vérité de chaque vote est renfermée entre des limites données, il cherche la probabilité moyenne de la vérité d'une décision portée par un nombre donné de votans, à une pluralité donnée (*).

En désignant par $a$ et $b$ les valeurs entre lesquelles doit demeurer comprise la probabilité représentée ci-dessus par $\frac{v}{v+m}$, on trouvera, par les considérations du n° 87, que les probabilités moyennes qu'il y a eu $p$ votes pour la vérité et $q$ pour l'erreur, ou bien le contraire, sont

$$C\left[S_b^{(p,q)} - S_a^{(p,q)}\right], \quad C\left[S_b^{(q,p)} - S_a^{(q,p)}\right],$$

ce qui donne pour la probabilité relative du 1^er cas,

$$\frac{S^{(p,q)} - S_a^{(p,q)}}{\left\{S_b^{(p,q)} - S_a^{(p,q)}\right\} + \left\{S_b^{(q,p)} - S_a^{(q,p)}\right\}}.$$

(*Voyez aussi* la Note III.)

M. Laplace, qui n'avait point eu égard à ces remarques dans la *seconde* édition de sa *Théorie analytique des Probabilités*, s'en est occupé, pour la 3^e édition de son *Essai philosophique* sur ce sujet; et il donne aux limites $a$ et $b$, que Condorcet suppose déduites de l'examen de décisions antérieures, les valeurs $\frac{1}{2}$ et 1, les

(*) *Essai sur la Probabilité des Décisions*, pag. 244—245.

plus distantes que l'on puisse adopter, puisqu'il cesse d'être probable qu'une décision rendue à la pluralité des voix, sera conforme à la vérité, quand la probabilité de chaque vote est au-dessous de $\frac{1}{2}$ (141). Voici quelques résultats de cette hypothèse, rapportés à la p. 159 de l'ouvrage que je viens de citer et que donne aussi la formule précédente : « Dans les tribunaux spéciaux où » cinq voix, sur huit, suffisent pour la condamnation » de l'accusé, la probabilité de l'erreur à craindre sur » la bonté du jugement est $\frac{65}{256}$ ou au-dessus de $\frac{1}{4}$. La » grandeur de cette fraction, dit avec raison M. Laplace, » est effrayante. » Dans un jury, composé de douze membres, la probabilité de l'erreur n'est que $\frac{1093}{8192}$, un peu plus grande que $\frac{1}{8}$, lorsque la décision est portée par 8 voix, $\frac{378}{8192}$ ou environ $\frac{1}{22}$ quand la majorité est de 9 voix, et seulement $\frac{1}{8192}$ pour l'unanimité, ce qui est la condition du jury anglais; d'où il suit que ce jury aurait l'avantage, si d'autres considérations ne prouvaient que cette unanimité peut souvent être forcée. Mais ce qui doit rassurer sur les décisions des jurys, en tems ordinaire, lorsque les membres qui les composent ne sont prévenus d'aucun sentiment pour ou contre la classe d'accusés qu'on leur présente, et ce qui fonde leur supériorité sur les anciens tribunaux, c'est la terreur que sent dans son ame tout homme compatissant, d'en condamner un autre injustement ou à une peine trop sévère, sentiment que la longue habitude d'examiner et de juger des accusés affaiblit beaucoup dans les meilleurs naturels, comme le remarque M. Laplace. Rien n'est donc plus affligeant pour l'humanité et la justice, que la nécessité, si tant est qu'elle existe, de créer des tribunaux extraordinaires, dans lesquels il est bien difficile que l'accusé ne trouve pas d'abord par la nature du délit qui lui est imputé, une prévention très-défavorable; aussi les mo-

tive-t-on principalement sur le danger que, dans certains cas, l'impunité des coupables peut faire courir à la société.

145. Condorcet a eu égard à cette dernière circonstance pour les délits ordinaires; et cherchant à concilier les intérêts d'un accusé avec la sûreté de la société, il consacre la première partie de son ouvrage à déterminer dans un grand nombre d'hypothèses de pluralité, la probabilité qu'un innocent ne serait pas condamné, et celle qu'un coupable ne serait pas absous. Pour cela il s'est proposé les questions suivantes : 1° *quelle est la probabilité que l'erreur n'obtiendra pas la pluralité exigée? 2° quelle est celle que la vérité obtiendra cette pluralité?* événemens qui ne sont pas contradictoires quand on exige plus que la simple majorité, ou que le nombre des votans est pair.

En effet, si on suppose constante la probabilité de la vérité de chaque vote, que pour abréger on fasse

$$\frac{v}{v+m}=e, \quad \frac{m}{v+m}=f,$$

et qu'il y ait $p$ votans, on aura

$$e^p+\frac{p}{1}e^{p-1}f+\frac{p(p-1)}{1.2}e^{p-2}f^2+\ldots$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1)\,e^{p-q}f^q}{1.2.3\ldots q},$$

pour la probabilité que le nombre des votes conformes à la vérité, ne tombera pas au-dessous de $p-q$; si donc on exige la pluralité $r$, pour condamner un accusé, et qu'il soit renvoyé s'il n'a pas cette pluralité contre lui, l'expression précédente continuée jusqu'à ce que

$$q-(p-q)=r-2, \quad \text{d'où} \quad q=\frac{p+r}{2}-1;$$

donnera la probabilité que la vérité n'aura pas contre elle la pluralité, et par conséquent que l'accusé ne sera pas condamné injustement ; voilà pour la première question.

La seconde dépend encore de l'expression ci-dessus, mais continuée seulement jusqu'à ce que

$$p-q-q=r, \quad \text{d'où} \quad q=\frac{p-r}{2};$$

condition d'après laquelle la vérité ayant au moins la pluralité exigée, sera nécessairement adoptée, et par conséquent l'accusé condamné s'il est coupable.

La différence de ces deux probabilités formée de la partie du développement de $(e+f)^p$, commençant au terme affecté de $e^{\frac{1}{2}(p+r)-1}f^{\frac{1}{2}(p-r)+1}$ jusqu'à celui qui l'est de $e^{\frac{1}{2}(p-r)+1}f^{\frac{1}{2}(p+r)-1}$, renferme tous les cas où la vérité ni l'erreur n'auront la pluralité exigée, et variera avec les nombres $r$ et $p$ (*). C'est à diminuer cette différence, en conservant d'ailleurs la plus grande valeur possible à la première probabilité, que doit tendre la constitution d'un tribunal, considération analogue à celle du n° 129. Condorcet a discuté avec soin toutes les combinaisons auxquelles elle peut conduire, en supposant que le nombre de votans soit impair ou pair, la pluralité constante ou proportionnelle au nombre des votans, ou composée d'une

(*) J'omets, pour abréger, la discussion des formes que doivent avoir les nombres $r$ et $p$, pour que les exposans des lettres $e$ et $f$ soient des entiers ; il est bien facile d'y suppléer. On voit aussi qu'en changeant $e$ en $f$, et réciproquement dans la seconde probabilité, on formera l'expression de la probabilité que l'erreur obtiendra la pluralité exigée, et qui est la contraire de la première des probabilités indiquées dans le texte.

partie proportionnelle à ce nombre et d'une partie constante. Il a examiné ensuite les relations qu'ont entr'elles les diverses quantités qui entrent dans ces calculs, soit comme données, soit comme inconnues, et a varié les questions avec un détail où nous ne saurions entrer. On peut sans doute attaquer ces applications du calcul des probabilités avec autant de raison que ce qui regarde les témoignages; et nous avons déjà fait connaître les principales objections qui se présentent sur ce sujet : mais cependant, si les hypothèses auxquelles il a fallu recourir, ne permettent pas d'accorder beaucoup de confiance aux résultats obtenus, la connaissance des combinaisons qu'elles développent et de la marche des valeurs qui en dérivent, n'est pas non plus sans quelque utilité pour diriger la réflexion sur ce qui peut arriver réellement, du moins quand il ne s'opère pas des changemens brusques dans la probabilité des votes, et pour classer les faits afin d'en déduire des conséquences précises et applicables.

146. Les élections sont aussi des jugemens lorsqu'on les envisage sous le rapport de la bonté du choix, qui dépend des lumières et de l'impartialité des électeurs ; et l'on peut demander quelle est la probabilité qu'un candidat admis d'après une forme donnée de scrutin, a une véritable supériorité sur ses concurrens. Malheureusement les passions ne dérangent pas moins ici les calculs que dans les témoignages et les décisions. En vain Condorcet et plusieurs autres publicistes ont-ils cherché des formes qui pussent ôter à l'intrigue son influence; ou ces formes n'ont pas été soumises à l'expérience, ou elles ont été trouvées défectueuses. Mais en renonçant à ce point de vue du problème, et en regardant seulement une élection, ou, ce qui est la même chose, une décision à la pluralité des voix entre plu-

sieurs propositions, comme un moyen de terminer les débats en adhérant au vœu du plus grand nombre, il reste encore beaucoup de difficulté à constater, dans certains cas, quel est réellement ce vœu (*)? L'étendue à laquelle est déjà parvenu cet ouvrage, me permet à peine d'indiquer sur chacune de ces divisions du sujet, quelques principes généraux.

Lorsqu'il n'y a que deux candidats, la majorité des suffrages en faveur de l'un d'eux, se manifestant tout de suite, indique sa supériorité si les électeurs sont également éclairés, et dans tous les cas prouve qu'il a le vœu du plus grand nombre; mais il n'en est plus ainsi dès qu'il y a seulement trois candidats. En effet, quand un électeur vote seulement pour le candidat qu'il estime le plus, il laisse indécis l'ordre de préférence qu'il assignerait aux autres s'il était obligé de choisir entre eux; mais si chaque votant écrivait sur son bulletin les trois noms des candidats rangés dans l'ordre de mérite qu'il leur attribue, ne pourrait-il pas arriver que celui qui a été le premier sur la majorité des bulletins, mais le dernier sur tout le reste, eût moins de mérite que celui qui a été inscrit le second par tous ceux qui ne lui ont pas donné le premier rang. Il est aisé d'apercevoir que cela dépendrait de la valeur qu'on attacherait à la différence de mérite entre les rangs.

Si, par exemple, en suivant le scrutin proposé par Borda (**), on donne au mérite respectif des candidats des valeurs proportionnelles au rang qu'on leur assigne,

---

(*) Il ne paraît pas qu'on ait fait cette distinction avant M. Daunou, dans l'excellent Mémoire qu'il a lu en l'an IX (1803), sur ce sujet à la Classe des Sciences morales et politiques de l'Institut, et qui n'ayant été imprimé qu'à part, est assez difficile à trouver.

(**) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1781, pag. 657.

qu'on écrive en conséquence 3 pour le premier, 2 pour le second et 1 pour le troisième, qu'il y ait 3 candidats désignés par les lettres $A$, $B$, $C$, que sur 100 votans 65 leur assignent l'ordre $ABC$ et 35 l'ordre $BCA$; il est évident que la majorité des suffrages est pour $A$, puisqu'il a été regardé comme supérieur à tous les autres par 65 électeurs : cependant, si l'on estime le mérite relatif des candidats par la somme des nombres qu'ils obtiennent sur chaque liste, on ne trouvera pour $A$ que

$$65.3 + 35.1 = 230,$$

tandis que $B$ placé le premier 35 fois seulement, mais 65 fois le second, aura

$$65.2 + 35.3 = 235,$$

et sera par conséquent élu dans cette forme de scrutin.

Il n'y aurait rien à dire contre cette conclusion, si la graduation des numéros était exacte, et qu'ils eussent été appliqués de bonne foi; mais il n'est pas difficile de voir qu'elle est peu sûre sous le premier rapport, et que sous le second elle se prête facilement à l'esprit de cabale. Substituons d'abord aux nombres déterminés 3, 2, 1 les lettres $p$, $q$, $r$, et nous arriverons par le même scrutin à l'élection de $A$, si nous posons

$$65p + 35r > 35p + 65q,$$

ce qui peut se faire d'une infinité de manières. En laissant aux lettres $q$ et $r$, leurs valeurs primitives 2 et 1, la condition ci-dessus devient

$$65p + 35 > 35p + 130 \quad \text{ou} \quad 30p > 95,$$

et montre qu'il suffit de faire $p > 3\frac{1}{6}$ pour que la somme des numéros obtenus par $A$, soit la plus forte : or peut-

on balancer le mérite des candidats avec une exactitude aussi minutieuse ; et d'ailleurs les votans auront-ils dans l'esprit une mesure commune à laquelle se rapportent exactement les unités qu'ils emploient? Autrement les plus sévères déprécieront trop les candidats, les plus indulgens leur assigneront des nombres trop forts.

La dépréciation pourra même être effectuée de mauvaise foi, dans l'intention d'écarter le concurrent qu'on craint le plus. En effet, dans l'exemple que je viens de donner, 35 électeurs sachant que les meilleurs candidats sont $A$ et $B$, et voulant exclure $A$, n'ont qu'à s'entendre pour le placer au dernier rang, ils rendront inutile le vœu d'une majorité très-prononcée en sa faveur. Il n'est pas douteux que dès qu'une pareille circonstance est remarquée, les passions ne la mettent bientôt à profit; et qu'on ne croye pas qu'elle ne puisse avoir lieu que dans quelques cas : elle est au contraire très-étendue; car si l'on désigne par $m+n$ le nombre des électeurs, qu'il y ait $m$ bulletins dans la forme $ABC$, et $n$ dans la forme $BCA$, $A$ ne pourra être élu qu'autant que

$$3m+n>2m+3n, \quad \text{ou} \quad m>2n;$$

il lui faudra donc plus des $\frac{2}{3}$ des suffrages individuels. Les inconvéniens de ce scrutin deviennent encore plus graves si le nombre des candidats est plus considérable.

147. Lorsqu'on a reconnu la très-grande difficulté, pour ne pas dire l'impossibilité d'obtenir par les appréciations de chaque électeur, une évaluation exacte du mérite respectif des candidats, il faut en revenir à prendre pour cette mesure, le vœu bien exprimé de la majorité; et le moyen qui se présente pour connaître ce vœu, est de consulter chaque électeur sur ces candidats comparés deux à deux. C'est à quoi peuvent servir

les numéros affectés à chaque candidat, pourvu qu'on ne leur assigne d'autre fonction que d'exprimer le rang dans lequel ils sont placés par les électeurs.

En établissant un certain ordre $ABC$, par exemple, le votant affirme les propositions suivantes,

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ vaut mieux que } B \\ B \text{ vaut mieux que } C \end{array}\right\} \text{d'où il suit } A \text{ vaut mieux que } C,$$

ce que pour abréger nous exprimerons par

$$A > B, \quad B > C, \quad \text{d'où} \quad A > C.$$

Cela posé, trois candidats pouvant être rangés 2 à 2 de six manières différentes, il faudra, en décomposant les scrutins comme ci-dessus, chercher quels sont les arrangemens qui ont obtenu le plus grand nombre de voix et en déterminer les conséquences sur l'ordre à établir entre les 3 candidats.

Supposons que 60 électeurs se soient partagés sur l'ordre des candidats, comme il suit :

23 pour $ACB$, 19 pour $BCA$,
16 pour $CBA$, 2 pour $CAB$;

formant d'abord la comparaison de $A$ avec $B$, on trouvera que la proposition $A > B$ est établie par $23+2=25$ suffrages, et sa contradictoire $B > A$, par $19+16=35$.

La proposition $A > C$ par 23 et sa contradictoire $C > A$, par $19+16+2=37$;

La proposition $B > C$ par 19 et sa contradictoire $C > B$, par $23+16+2=41$.

Parmi toutes ces propositions les trois qui ont obtenu le plus de suffrages, sont donc $C > B$ donnée par 41, $C > A$ par 37, $B > A$ par 35.

Ce système de propositions qui ne renferme aucune contradiction, établissant l'ordre $CBA$, donne la supériorité absolue au candidat $C$, qui n'aurait eu que 18 voix sur 60, si l'on n'avait écrit qu'un seul nom sur chaque bulletin, tandis que $A$ en aurait eu 23 et $B$ 19; et si, conformément à l'usage établi quand l'élection doit être faite à la majorité absolue, on eût obligé les électeurs dans un nouveau scrutin (le *ballotage*), à ne voter que sur les deux candidats qui avaient obtenu le plus de voix, $C$ aurait été exclu. Il est visible que ce dernier défaut du scrutin ordinaire croît avec le nombre des votans et des candidats; et qu'un petit nombre d'électeurs qui s'entendent peuvent forcer la majorité, dont les voix se sont dispersées sur un grand nombre de candidats, à choisir entre deux qu'elle repousserait si elle en avait la liberté.

148. Dans l'exemple précédent les trois propositions qui ont obtenu le plus de voix sont, comme nous l'avons remarqué, compatibles entr'elles, et toutes nécessaires si l'on veut établir un ordre définitif entre les candidats; car les deux premières laissent indéterminée la subordination qui doit exister entre $A$ et $B$; mais cela n'arrive pas toujours. Si, le nombre des électeurs restant le même, leurs voix étaient divisées de cette manière,

12 pour $ABC$, 9 pour $ACB$, 20 pour $BCA$,
10 pour $CAB$, 9 pour $CBA$,

on trouverait, en opérant comme ci-dessus,

$A > B$ par 31 suffrages et $B > A$ par 29,
$A > C$ par 21 et $C > A$ par 39,
$B > C$ par 32 et $C > B$ par 28;

rapprochant alors les propositions qui ont obtenu le

plus de voix, on tomberait sur le système

$C > A$ donnée par 39, $B > C$ par 32 et $A > B$ par 31,

dont les deux premières conduisent nécessairement à $B > A$, résultat contraire à la 3ᵉ.

Pour échapper à cette contradiction, Condorcet, qui a discuté avec beaucoup de soin et à plusieurs reprises, la théorie des élections, propose de ne composer le résultat final qu'avec deux propositions, lorsqu'elles ont une conséquence nécessaire, et de chercher ensuite parmi les trois systèmes qu'on peut faire en combinant deux à deux les trois propositions indiquées ci-dessus, celui qui a obtenu le plus de suffrages, en réunissant les votes qui ont été donnés à chacune des propositions dont il est composé. Or on trouve ainsi

| | | |
|---|---|---|
| 71 suffrages pour | $C > A$, $B > C$, | d'où l'ordre $BCA$; |
| 70 | $C > A$, $A > B$, | $CAB$, |
| 63 | $B > C$, $A > B$, | $ABC$: |

c'est donc le premier système qui est voté le plus fortement, et auquel il faut s'arrêter si toutefois on est forcé de consommer l'élection (*). Cette dernière restriction a paru très-nécessaire à M. Daunou qui présente contre cette manière de combiner les propositions, des difficultés très-fondées, et qui pense que dans ce cas douteux où il ne saurait y avoir de majorité bien prouvée, le seul parti à prendre, si l'on ne pouvait remettre l'élection, serait de choisir le candidat qui a la pluralité relative (**).

(*) *Essai sur la Probabilité des Décisions*, Discours préliminaire, pag. lxvij.

(**) *Mémoire sur les Elections*, pag. 63.

149. Les propositions comparées dans les numéros précédens par rapport aux nombres de suffrages qu'elles ont obtenus, pourraient l'être par rapport à leurs probabilités lorsque celles de la vérité et de l'erreur de chaque vote sont connues. Par exemple, un scrutin de 33 votes, sur lesquels 18 sont pour $A > B$ et $A > C$, 15 pour $B > A$ et $C > A$, 32 pour $B > C$ et 1 pour $C > B$, conduirait à l'élection de $A$ par les propositions $A > B$ et $A > C$, dont le système a une probabilité

$$\frac{v^3}{v^3 + m^3} \cdot \frac{v^3}{v^3 + m^3} \text{ (131 et 17)};$$

mais la très-grande pluralité qu'a obtenue la proposition $B > C$, donne, dans le cas où $v$ surpasserait peu $m$, plus de probabilité au système $B > C$ et $B > A$, quoique la seconde proposition n'ait eu que la minorité des suffrages.

En effet la probabilité de ce dernier système étant

$$\frac{v^{31}}{v^{31} + m^{31}} \cdot \frac{m^3}{v^3 + m^3},$$

si l'on fait, pour abréger, $m = \alpha v$, qu'on réduise au même dénominateur, les probabilités du premier et du second système, on trouve pour les numérateurs,

$$1 + \alpha^{31} \quad \text{et} \quad \alpha^3 (1 + \alpha^3),$$

expressions qui deviennent 1,038 et 1,260 lorsque $\alpha = 0,9$; « ainsi, dit Condorcet, le système pour lequel » on conclut la pluralité, n'est pas nécessairement celui » qui a la plus grande probabilité (*) »; mais cependant

(*) *Essai sur la Probabilité des Décisions*, pag. 123.

on ne doit pas adopter ce dernier dans tous les cas, parce que souvent l'une des deux propositions n'ayant qu'une probabilité fort petite, impliquerait contradiction avec d'autres qui en ont une plus grande.

Si l'on joint à cette difficulté, celle de constater la probabilité de chaque vote; on sera bien fondé à s'en tenir dans les élections, à la recherche du vœu de la majorité, ce qui, comme on vient de le voir, n'est pas toujours une chose aussi simple qu'on pourrait le penser. En réduisant le nombre des votans on facilite beaucoup la formation des votes et leur dépouillement. Cette raison, jointe à d'autres que ce n'est pas ici le lieu d'exposer, a conduit à établir plusieurs degrés d'élection pour arriver à un choix définitif, c'est-à-dire, à faire nommer d'abord des électeurs, qui doivent à leur tour en choisir d'autres, et ainsi de suite; mais par ce mode, l'influence de la volonté générale diminue à chaque nouveau degré qu'on ajoute à l'élection, et le choix de l'assemblée la plus élevée est souvent très-différent de celui qu'aurait indiqué cette volonté, si on l'avait immédiatement consultée : un calcul fort simple rend très-frappante la vérité de cette assertion (*).

150. Pour achever de parcourir les principales applications du calcul des probabilités, il me resterait à parler de la manière de prendre le milieu entre plusieurs résultats ou observations, en ayant égard aux diverses probabilités des erreurs, ou de déterminer les corrections les plus avantageuses que des valeurs déjà très-approchées, doivent subir pour satisfaire le mieux possible à un grand nombre d'observations. Cette recherche com-

---

(*) Voyez les Remarques de M. Gergonne, *Annales de Mathématiques*, tome VI, pag. 1.

mencée par Lagrange, éclaircie par Euler (*), a été poussée très-loin par M. Laplace; mais comme elle se rapporte principalement à l'Astronomie, elle sort des limites que j'ai dû me prescrire. Je me bornerai seulement à dire que la règle la meilleure, celle de rendre un *minimum* la somme des quarrés des erreurs, où elles entrent dans leur entier quel que soit leur signe, a été établie par M. Legendre, d'une manière très-simple (**); quant à l'évaluation de la probabilité du résultat auquel elle conduit, on la trouve dans la *Théorie analytique des Probabilités.*

### *De l'évaluation morale des Probabilités.*

151. Lorsque le calcul des probabilités est appliqué à des sujets qui intéressent notre fortune ou notre vie, des nombres abstraits paraissent peu propres à nous faire connaître l'importance que nous devons attacher à ses résultats. Mais si l'objet de ce calcul est de ramener, autant que faire se peut, nos impressions à une mesure exacte, il doit nous offrir aussi le moyen de trouver une impression équivalente à une mesure donnée. En effet, placés au milieu d'une foule de dangers que nous sommes obligés de braver soit pour notre intérêt ou pour notre plaisir, et sur lesquels l'habitude et l'opinion générale paraissent assez constantes, les probabilités de ces dangers peuvent servir de termes de comparaison avec ceux qui ont été calculés et non encore éprouvés.

(*) *Mélanges de la Société de Turin*, t. v, p. 167, *Nova Acta Acad. Petropolitanæ*, l. III, p. 289.

(**) Voyez *Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des Comètes*, pag. 72. Depuis la publication de ce Mémoire, on a appris que M. Gauss, de son côté, était parvenu à la même règle.

Pour un intérêt assez modique, un homme prudent entreprend une traversée plus ou moins longue, sur mer, un passage difficile, par exemple celui du pont S^t-Esprit lorsqu'on descend le Rhône en bateau, et une foule d'autres actions assujéties à des risques divers. Si donc on avait des relevés exacts qui fissent connaître la proportion des accidens aux succès, on en déduirait une échelle de probabilités, dont la valeur morale serait mesurée par l'importance attachée aux résolutions qu'exigent les entreprises dont il s'agit. On pourrait aussi comprendre dans cette classe les risques pécuniaires, auxquels se soumettent, dans l'espoir d'un gain plus ou moins considérable, des hommes connus pour leur expérience et leur sagesse dans la conduite de leurs affaires; mais ces données manquant, on a tâché d'y suppléer par les Tables de mortalité (*).

Buffon s'en est servi pour déterminer une limite au-dessous de laquelle toute probabilité devait être regardée comme nulle (76); il fixa cette limite à $\frac{1}{10000}$, parce qu'aucun homme dans son bon sens, n'est frappé de la crainte de mourir dans le jour, et que sur 10000 personnes il en meurt une dans cet intervalle. Daniel Bernoulli observa d'abord que pour former cette valeur avec exactitude, il fallait n'y pas comprendre les individus qui avaient une maladie ou des motifs connus de craindre une mort prochaine; et Condorcet pensait qu'un risque nécessaire et habituel ne pouvait pas servir de terme de comparaison lorsqu'il s'agit d'une détermination volontaire; que d'ailleurs on ne pouvait pas se borner à ce seul terme, et qu'il en fallait au contraire un très-grand nombre, afin qu'il y en eût pour les di-

(*) *Essai sur la probabilité des décisions*, pag. 225, et Discours préliminaire, pag. cvij.

verses spéculations qu'on pouvait se proposer. Cette dernière objection me paraît au fond la plus solide; car si nous nous habituons pour nous-mêmes au danger de mourir dans un intervalle de tems très-court, nous l'apprécions mieux à l'égard des autres; et nous faisons reposer des intérêts plus ou moins grands sur l'existence des personnes, d'après leur âge et l'état de leur santé.

En calculant donc le risque de mourir pour des personnes bien portantes, pendant un an, un mois, une semaine, un jour, une heure même, à différens âges, on formera sans peine l'échelle dont nous avons parlé.

La Table dressée par Deparcieux sur des individus choisis (102), donne à l'âge de 20 ans la probabilité

$$\frac{8}{814} \text{ ou environ } \frac{1}{100} \text{ de mourir dans l'année,}$$

$$\frac{8}{814.12} = \frac{1}{1221} \qquad \text{dans le mois,}$$

$$\frac{8}{814.52} = \frac{1}{5291} \qquad \text{dans la semaine,}$$

$$\frac{8}{814.365} \text{ ou environ } \frac{1}{37139} \qquad \text{dans le jour,}$$

$$\frac{8}{814.365.24} = \frac{1}{891330} \qquad \text{dans une heure.}$$

Ces probabilités varient avec l'âge, mais par des différences qui sont d'autant moindres, que l'intervalle de tems est plus court. Prenant dans la même Table les probabilités analogues pour l'âge de 50 ans, on trouve

$$\frac{10}{581} \text{ dans 1 an, } \frac{10}{581.52} \text{ dans une semaine, etc.}$$

Si l'on retranche de cette probabilité celle qui correspond à l'âge de 20 ans, la différence sera la mesure

de l'augmentation que l'âge apporte au risque de mourir pendant la semaine, augmentation dont l'importance morale est fort petite; car un homme de 50 ans qui jouit d'une bonne santé, n'appréhende guère plus de mourir dans un intervalle très court, qu'un jeune homme de 20 ans. Ce genre de probabilités était celui que Condorcet proposait de préférence, comme pouvant servir de terme de comparaison. Au reste ce ne sont encore là que des vues qu'il ne faut pas trop restreindre; car il est évident que le sujet ne saurait admettre des nuances bien délicates, et que le but est rempli quand on a offert à l'imagination un rapprochement qu'elle peut saisir.

### *Résumé général.*

152. Dans les *Notions préliminaires* formant le premier paragraphe de ce Traité, j'ai tâché de faire sortir celle de la probabilité, des habitudes mêmes de notre entendement, et de montrer que, reposant par sa nature sur une énumération, elle pouvait être susceptible de se prêter au calcul, au moins dans un grand nombre de cas. Après avoir parcouru les plus importans, il me paraît utile de résumer les circonstances remarquables qu'ils nous ont offertes, comme devant compléter le Tableau de la science déjà ébauché en parlant de son origine.

Déterminer le rapport du nombre des chances qui amènent un événement, au nombre total des chances qui peuvent arriver, en descendant jusqu'à celles qui sont également possibles : tel est le problème à résoudre quand les événemens sont produits par des combinaisons dont les élémens sont donnés et dont le mode est connu, ce qui est le cas des jeux; et l'on sent qu'alors le calcul doit souvent rectifier les simples aperçus du bon sens, qui ne peut pas suivre le détail des combinaisons

lorsqu'elles se multiplient et se compliquent au-delà d'un certain terme. Aussi avons-nous donné plusieurs exemples d'erreurs remarquables (19, 23, 43).

Le penchant qui nous fait attendre avec plus de confiance l'arrivée de l'événement par rapport auquel nous pouvons répéter plus souvent le jugement de possibilité que le jugement contraire (5), ne serait, dans le cas qui nous occupe, qu'une illusion, si la théorie mathématique des combinaisons ne montrait pas que le nombre de celles qui sont favorables à ce penchant, augmente à mesure qu'on embrasse un plus grand nombre d'épreuves (28), et qu'elles conduisent à des probabilités dont la grandeur frappe également tous les esprits; ensorte que le tems donnerait aux plus grossiers la preuve de ce qui ne peut d'abord être saisi que par une sagacité très-exercée : et de là se déduit le petit nombre de propositions suffisantes pour fonder les motifs qui nous font croire à la probabilité (36, 37) (*).

Cette même propriété de la répétition des épreuves conduit à l'évaluation pécuniaire des événemens aléatoires, et mettant en évidence les suites que doit avoir nécessairement à la longue la plus petite inégalité dans le sort des joueurs, dès qu'elle est constante (64), montre combien il est imprudent de se livrer au jeu quand on y a du désavantage, et même de risquer des sommes un peu considérables, quand le jeu est égal, parce que la perte de ces sommes ôtant le moyen d'atteindre à une longue suite d'événemens, trouble nécessairement cette égalité.

153. Ce n'est pas pour les seuls événemens que nous

(*) Le fond de ces diverses propositions est renfermé dans ce jugement de Gibbon. « *Les lois de la probabilité si vraies en général, si trompeuses en particulier,* » (*Mémoires de Gibbon*, t. Ier, p. 261—262 de la traduction française.)

pouvons voir sortir des combinaisons qui les produisent, que la probabilité acquiert du crédit sur notre esprit ; elle opère de même à l'égard de la répétition des faits dont l'origine nous est totalement inconnue. En assimilant la production de ces faits au jet d'un dé, au tirage de numéros pris au hasard dans une urne, on doit en effet conclure du théorème de Jacques Bernoulli (30) que, si des observations multipliées manifestent, dans la succession des divers événemens, des rapports renfermés entre des limites peu distantes, ces rapports indiquent à peu près les probabilités simples d'après lesquelles on peut conjecturer sur l'avenir. Le sentiment de la constance des lois de la nature, inspiré de bonne heure, par l'immense répétition des mêmes successions dans le plus grand nombre des faits qui se passent sous nos yeux, avait conduit à cet aperçu ; mais il n'était pas inutile, ce me semble, de le voir sortir aussi du développement des combinaisons mathématiques, et, ce qui est encore plus remarquable, de l'obtenir comme le terme moyen du nombre infini d'hypothèses qu'on peut faire sur la possibilité des événemens dont les causes sont tout-à-fait ignorées (81, 87). C'est sous cette dernière forme qu'il est bien circonscrit, qu'on reconnaît les bornes où il faut le renfermer, et comment l'assurance diminue à mesure que l'étendue de l'avenir augmente par rapport à celle du passé (85).

La fréquente succession des mêmes faits, qui mène à l'idée d'une liaison nécessaire entr'eux, étant soumise au calcul, donne une mesure de la probabilité de cette liaison, et montre jusqu'à quel point on peut y compter, quand même on n'aurait pas d'autres motifs de l'établir (98, 99). Cette théorie mérite quelqu'attention puisqu'elle offre un moyen très-spécieux de réfuter les excès du scepticisme, sans recourir à ces principes posés à

*priori*, et tout au moins aussi douteux et aussi obscurs que ce qu'on prouve par leur secours.

154. La détermination des probabilités, par le nombre et le mode des combinaisons, le même problème, lorsqu'on n'a pour données que l'observation des événemens passés, enfin la détermination de la probabilité de l'existence des causes, ou, pour parler plus exactement, des tendances naturelles à la production des événemens qui sont plus répétés que d'autres, sont donc des questions dont la solution n'est pas seulement curieuse comme pouvant exiger beaucoup de science de calcul, mais encore comme donnant des fondemens plus solides aux principes généraux de l'art de conjecturer (*).

155. Pour appliquer cet art, il faut des données; et suivant leur nature elles seront susceptibles ou non de se prêter au calcul. Celles de la première espèce ne manquent point dans les jeux où elles se tirent des conventions établies et de la forme des instrumens aléatoires. Dans les autres applications, ce sont des faits qui n'ont encore été recueillis que d'une manière très-incomplète, et pour certaines classes seulement. La principale, celle des faits concernant la durée de la vie humaine, a fourni d'utiles spéculations, et d'autant plus sûres qu'elles ont

(*) La dernière de ces questions, considérée en général, a bien l'importance qu'on lui attribue ici, mais non pas dans toutes ses applications. La connaissance de la valeur précise de la probabilité que des effets sont dus à une cause plutôt qu'au hasard, n'apprenant rien sur la nature de cette cause, paraît bien loin de répondre par son utilité à l'appareil de calcul qu'exige très-souvent sa détermination. Quand la répétition des faits, ou leur constance est suffisamment constatée par les moyens les plus simples, on essaye de les lier par des hypothèses; et l'histoire des sciences prouve qu'on marche à cet égard du simple au composé, en suivant l'ordre des apparences, qu'on prend d'abord ce qu'on voit pour ce qui est, et qu'on rapporte les formes et les effets à ceux qui semblent les plus répétés.

été appuyées sur des élémens plutôt observés que conclus ; car, ainsi qu'on l'a vu plusieurs fois dans le cours de cet ouvrage, c'est par les hypothèses imaginées pour suppléer aux observations immédiates, que l'erreur s'introduit dans le calcul. Les questions qui s'y montrent le plus rebelles sont, sans contredit, celles qui tiennent à la volonté des hommes ; mais cependant nos actions ont des conséquences aussi nécessaires que celles de toutes les autres forces de la nature, et laissent des traces qui scrupuleusement examinées, discutées et énumérées, fournissent *à posteriori* une mesure de la valeur de ces actions. Si par rapport aux témoignages, aux jugemens, les passions se jouent du calcul, leurs effets bien observés en préciseraient toute l'influence beaucoup mieux que les déclamations auxquelles on peut aisément avec de bonnes intentions et peu de lumières, se livrer sur un sujet tant rebattu.

Ainsi ne nous lassons pas de répéter, avec tous ceux qui desirent sincèrement les progrès de la civilisation, qu'il en faut toujours revenir aux faits ; que tout, à la longue, peut se compter, se mesurer, et par conséquent être soustrait, au moins en grande partie, à l'empire de l'imagination ; mais disons aussi qu'on ne saurait atteindre ce point si desirable, qu'en mettant la plus grande rigueur et le plus grand détail dans la classification des faits, afin d'éviter ces associations irréfléchies et inexactes qui chargent les meilleurs principes, de conséquences odieuses tout-à-fait étrangères à ces principes, comme on pourrait le prouver, non-seulement par des discussions raisonnées, mais en montrant par les faits que les mêmes conséquences ont pu être tout aussi légitimement attribuées aux principes les plus opposés.

Enfin, quand les faits manquent ou ne sont pas concluans, la discussion qu'il faut substituer aux mouvemens

d'un enthousiasme souvent factice, par lesquels on a égaré les hommes dans tous les sens, cette discussion, dis-je, doit prendre des formes assez analogues à celles du calcul. Balancer des avantages et des inconvéniens, séparer des exceptions, fixer des limites, n'est-ce pas en effet une sorte de manière de compter ? et quand l'affirmatif et le négatif se montrent au même degré, peut-on faire autrement que de rester dans le doute jusqu'à ce que de nouveaux faits l'aient dissipé ?

# NOTE PREMIÈRE.

*Sur le n° 25, pag. 59.*

1°. La formule de Stirling donne immédiatement la somme des logarithmes des termes d'une progression par différences. En prenant la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'au nombre quelconque $x$, on a

$$\mathrm{l}\,1 + \mathrm{l}\,2 + \mathrm{l}\,3 \ldots\ldots + \mathrm{l}\,x =$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{l}\,2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\,x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{etc.}$$

$\pi$ désignant le rapport de la circonférence au diamètre (*). Les logarithmes indiqués étant pris dans le système népérien, il faudra, si l'on veut employer les logarithmes ordinaires, multiplier par le module 0,4342945, les termes où il n'entre pas de logarithmes.

En passant aux nombres et désignant par e le nombre 2,7182818 dont le logarithme népérien est l'unité, il vient

$$1.2.3\ldots.x = \sqrt{2\pi}.\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{e^{x}}.e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{etc.}},$$

produit dans lequel le dernier facteur approche d'autant plus de l'unité que le nombre $x$ est plus considérable.

2°. Cela posé, on obtient, pour le produit

$$p(p-1)(p-2)\ldots(p-q+1) = \frac{p(p-1)\ldots\ldots 1}{1.2.3\ldots(p-q)},$$

(*) *Voyez* le 3e volume de mon *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral in-4°*, ou la fin du *Traité élémentaire* sur le même sujet.

l'expression

$$\frac{p^{p+\frac{1}{2}}}{e^p} \cdot \frac{e^{p-q}}{(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{1}{12p}-\text{etc.}}}{e^{\frac{1}{12(p-q)}-\text{etc.}}} = \frac{p^{p+\frac{1}{2}}}{e^q(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}} \cdot e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-q}\right)-\text{etc.}};$$

et si on la divise par celle du produit $1.2.3\ldots q$, on trouvera que

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots q} = \frac{p^{p+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,.\,q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}} \cdot e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p-q}-\frac{1}{q}\right)-\text{etc.}}$$

3°. Si l'on fait $p=2q$, et qu'on divise ce dernier résultat par $2^{2q}$ afin d'obtenir le rapport du développement de $(1+1)^{2q}$ avec le terme moyen, on trouvera

$$\frac{(2q)^{2q+\frac{1}{2}}}{2^{2q}\sqrt{2\pi}\,.\,q^{2q+1}} \times e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{2q}-\frac{2}{q}\right)-\frac{1}{360}\left(\frac{1}{8q^3}-\frac{2}{q^3}\right)+\text{etc.}} = \frac{1}{\sqrt{\pi q}} \cdot e^{-\frac{1}{8q}+\frac{1}{192q^3}-\text{etc.}}$$

En posant $2q=100$, on en déduira le nombre..... 0,0795892, rapporté sur la page 40.

A mesure que $q$ augmente, l'expression ci-dessus s'approche de

$$\frac{1}{\sqrt{\pi q}} = \sqrt{\frac{2}{2\pi q}} = \sqrt{\frac{2}{\pi p}},$$

quantité qui devient de plus en plus petite.

4°. Si l'on fait $p = rm + rn$, $q = rn$, pour obtenir le plus grand terme du développement de $(m+n)^{rm+rn}$ (27), on trouvera d'abord que le coefficient égale

$$\frac{(rm+rn)^{rm+rn+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}.(rn)^{rn+\frac{1}{2}}(rm)^{rm+\frac{1}{2}}} \times e^{\frac{1}{12r}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)-\text{etc.}} =$$

$$\frac{(m+n)^{rm+rn+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi rmn}\,.\,m^{rm}\,n^{rn}} \times e^{\frac{1}{12r}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)-\text{etc.}};$$

puis multipliant la dernière de ces valeurs par....... $\frac{m^{rm}\,n^{rn}}{(m+n)^{rm+rn}}$, il viendra

$$\sqrt{\frac{m+n}{2\pi rmn}}\,.\,e^{\frac{1}{12r}\left(\frac{1}{m+n}-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)-\text{etc.}}$$

pour le rapport du développement de $(m+n)^{rm+rn}$ avec son plus grand terme.

5°. Le rapport de deux termes quelconques du développement de $(m+n)^p$, affectés de $m^{p-q}\,n^q$ et $m^{p-q'}n^{q'}$, en négligeant pour abréger, les séries exponentielles qu'il est bien facile de restituer, a pour expression

$$\frac{p^{p+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{q'^{q'+\frac{1}{2}}(p-q')^{p-q'+\frac{1}{2}}\,n^{q-q'}}{p^{p+\frac{1}{2}}\,m^{q-q'}}$$

$$=\frac{q'^{q'+\frac{1}{2}}(p-q')^{p-q'+\frac{1}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}}(p-q)^{p-q+\frac{1}{2}}}\cdot\frac{n^{q-q'}}{m^{q-q'}}.$$

6°. Soit $p=rm+rn$, $q=rn$, $q'=rn-r$; l'expression précédente deviendra

$$\frac{r^{rm+rn+1}(n-1)^{rn-r+\frac{1}{2}}(m+1)^{rm+r+\frac{1}{2}}}{r^{rm+rn+1}\,n^{rn-r+\frac{1}{2}}\,m^{rm+r+\frac{1}{2}}}=$$

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{rn-r+\frac{1}{2}}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{rm+r+\frac{1}{2}},$$

résultat remarquable par sa forme, et dont la valeur numérique est susceptible de croître indéfiniment en même tems que le nombre $r$, ce qui prouve la proposition du n° 31.

Pour s'en convaincre, il suffit d'observer que

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{rn-r}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{r(n-1)}=e^{r(n-1)\,\mathrm{l}\left(\frac{n-1}{n}\right)},$$

$$\left(\frac{m+1}{m}\right)^{rm+r}=\left(\frac{m+1}{m}\right)^{r(m+1)}=e^{r(m+1)\,\mathrm{l}\left(\frac{m+1}{m}\right)},$$

$$\mathrm{l}\left(\frac{n-1}{n}\right)=\mathrm{l}\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}-\text{etc.},$$

$$\mathrm{l}\left(\frac{m+1}{m}\right)=\mathrm{l}\left(1+\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}-\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{3m^3}-\text{etc.},$$

ce qui donne

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{rn-r}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{rm+r} = e^{r\left(\frac{1}{2m}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{6m^2}+\frac{1}{6n^2}+\text{etc.}\right)};$$

car la série qui multiplie $r$ dans la dernière expression étant convergente et toujours positive, il s'ensuit que la valeur de cette expression croît toujours avec le nombre $r$, et que par conséquent il en est de même de

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{rn-r+\frac{1}{2}}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{rm+r+\frac{1}{2}} = \left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{m+1}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{rn-r}\left(\frac{m+1}{m}\right)^{rm+r}.$$

Si l'on posait $q'=rn+r$, ce qui donnerait $p-q'=rm-r$, ce changement ne ferait que mettre dans le rapport obtenu ci-dessus, $m$ à la place de $n$, et réciproquement.

7°. Si dans l'expression du coefficient du terme général du développement de $(m+n)^p$ (p. 266), on fait $p=rm+rn$; $q=rn-q'$, d'où $p-q=rm+q'$, et qu'on la multiplie par $\frac{m^{rm+q'}n^{rn-q'}}{(m+n)^{rm+rn}}$, elle deviendra

$$\frac{(rm+rn)^{rm+rn+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\,.\,(rn-q')^{rn-q'+\frac{1}{2}}(rm+q')^{rm+q'+\frac{1}{2}}} \times e^{\frac{1}{12}\left(\frac{1}{rm+rn}-\frac{1}{rm+q'}-\frac{1}{rn-q'}\right)-\text{etc.}} \times \frac{m^{rm+q'}\,n^{rn-q'}}{(m+n)^{rm+rn}},$$

et nous allons la simplifier en supposant $q'$ très-petit par rapport aux nombres $rm$ et $rn$. Le premier facteur se met aisément sous la forme

$$\frac{(m+n)^{rm+rn+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2r\pi}\,.\,n^{rn-q'+\frac{1}{2}}\,m^{rm+q'+\frac{1}{2}}}\times\frac{1}{\left(1-\frac{q'}{rn}\right)^{rn-q'+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{q'}{rm}\right)^{rm+q'+\frac{1}{2}}};$$

effectuant la multiplication par le 3$^e$ facteur et réduisant, on obtient

$$\frac{\sqrt{\frac{m+n}{2\pi rmn}}}{\left(1-\frac{q'}{rn}\right)^{rn-q'+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{q'}{rm}\right)^{rm+q'+\frac{1}{2}}}.$$

Observant ensuite que

$$\left(1-\frac{q'}{rn}\right)^{rn-q'+\frac{1}{2}}=e^{\left(rn-q'+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1-\frac{q'}{rn}\right)},$$

$$\left(1+\frac{q'}{rm}\right)^{rm+q'+\frac{1}{2}}=e^{\left(rm+q'+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l}\left(1+\frac{q'}{rm}\right)},$$

puis développant les exposans de $e$, et faisant leur somme, on trouve, après les réductions,

$$-\frac{q'}{2rn}+\frac{q'}{2rm}+\frac{q'^2}{2rn}+\frac{q'^2}{2rm}+\text{etc.};$$

et si l'on suppose le nombre $q$ assez petit par rapport aux nombres $rm$ et $rn$, pour que son quarré seul puisse

entrer en comparaison avec leurs premières puissances, on réduira cette expression aux termes

$$\frac{q'^2}{2rn}+\frac{q'^2}{2rm};$$

d'où il résultera enfin

$$\sqrt{\frac{m+n}{2\pi rmn}}\cdot e^{\frac{-q'^2}{2r}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}=\sqrt{\frac{m+n}{2\pi rmn}}\cdot e^{-\frac{m+n}{2rmn}q'^2},$$

expression qui donnera une valeur approchée du rapport entre le terme affecté de $m^{rm+q'}n^{rn-q'}$, et la puissance $(m+n)^{rm+rn}$, si l'on néglige la série exponentielle qui compose le second facteur de l'expression proposée, et qu'on regarde $q'^2$ comme comparable seulement aux premières puissances des nombres $rm$ et $rn$ (*).

Si l'on compare cette expression à celle du rapport entre le développement de $(m+n)^{rm+rn}$ et son plus grand terme (p. 267), on verra que

$$e^{\frac{m+n}{2rmn}q'^2}$$

est une expression approchée du quotient de ce plus grand terme divisé par celui qui est affecté de $m^{rm+q'}n^{rn-q'}$; et si l'on y fait $m=18$, $n=17$, $rm+rn=14000$, d'où $r=400$, $q'=163$, elle donne 44,7 valeur qui ne diffère pas sensiblement de celle qu'a trouvée Nicolas Bernoulli dans l'endroit cité sur la page 159, et d'où il conclut que la somme des 163 termes qui précèdent le plus considérable du développement de $(m+n)^{14000}$ et des 163 qui le suivent, est au reste de ce développement, dans un rapport plus grand que celui de 43,58 à 1.

(*) Elle devient celle qu'on trouve p. 278 de la *Theorie analytique des Probabilités*, lorsqu'on y change $rm+rn$ en $n$, $rm$ en $x$, $rn$ en $x'$ et $q'$ en $l$.

On peut parvenir à ce résultat au moyen des remarques faites dans le n° 32; car si on conçoit que les groupes de termes formés à partir de $M$, de $L$, etc. soient composés chacun d'un nombre $q'$ de termes, et qu'on les représente par $g$, $g'$, $g''$, etc., on aura

$$\frac{M}{L} < \frac{g}{g'}, \frac{g}{g'} < \frac{g'}{g''}, \text{ etc.}$$

Si donc on fait $\frac{M}{L} = k$, il viendra

$$g' < \frac{g}{k}, g'' < \frac{g'}{k} \text{ ou } < \frac{g}{k^2}, g''' < \frac{g''}{k} \text{ ou } < \frac{g}{k^3}, \text{ etc.}$$

et par conséquent

$$g' + g'' + g''' + \text{etc.} < \left(\frac{g}{k} + \frac{g}{k^2} + \frac{g}{k^3} + \text{etc.}\right) < \frac{g}{k-1},$$

et cela, en quelque nombre que soient les groupes; donc enfin le groupe $g$ sera à la somme de tous les autres, dans un rapport plus grand que $k - 1 : 1$.

8°. On peut encore obtenir plus directement la valeur approchée du rapport entre le groupe de termes désigné par $g$, et la totalité du développement de $(m+n)^p$, en cherchant la somme des valeurs que prend l'expression

$$\sqrt{\frac{m+n}{2\pi rmn}} \cdot e^{-\frac{m+n}{2rmn} q'^2}$$

depuis $q' = 0$, jusqu'au nombre assigné pour sa plus grande valeur, au moyen de la série sommatoire donnée par Euler dans son *Calcul différentiel*, et qu'on trouve aussi aux endroits cités en note au bas de la page 265. Cette formule qui est

$$Su = \int u dx + \frac{1}{2} u + \frac{1}{12} \frac{du}{dx} + \text{etc.},$$

lorsqu'on y fait $x = q'$, $u = be^{-aq'^2}$, donne

$$Sbe^{-aq'^2} = b\int e^{-aq'^2}dq' + \frac{1}{2}be^{-aq'^2} - \frac{1}{6}baq'e^{-aq'^2} + \text{etc.}$$

Mais on peut se borner aux deux premiers termes quand *ba* est fort petit, ainsi que cela a lieu pour l'exemple proposé; puisque

$$a = \frac{m+n}{2rmn}, \quad b = \sqrt{\frac{m+n}{2\pi rmn}} = \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

En posant alors $q'\sqrt{a} = t$, on obtient l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}dt + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}.e^{-t^2},$$

qu'il faut prendre depuis $t = 0$ jusqu'à la plus grande valeur de $t$, et doubler, si l'on veut réunir le groupe qui précède le plus grand terme, à celui qui le suit; puis on y ajoutera ce terme. Dans la Note III, je reviendrai sur l'intégrale indiquée.

On peut tirer de ces formules une démonstration de la proposition du n° 30; mais celle de Jacques Bernoulli paraît préférable, non-seulement parce qu'elle est élémentaire, mais encore parce qu'on y voit mieux la marche de l'approximation que dans les calculs ci-dessus fondés sur des séries qui ne sont point convergentes dans toute leur étendue, et où l'on néglige beaucoup de quantités, dont il ne semble pas facile d'apprécier exactement l'influence sur le résultat.

En terminant cette note, je dois dire que la sommation de la partie moyenne des termes des puissances élevées du binome, a été ramenée à des intégrales définies, par M. Laplace, dans les *Mémoires de l'Académie*

*des Sciences*, ann. 1782, p. 60, et par M. Legendre, dans les *Exercices de Calcul intégral*, Ve partie, p. 235.

*Sur le n° 85, page 144.*

1°. Si l'on applique à l'expression de $S_1^{(m,n)}$ (83) la formule de Stirling (p. 265), on trouvera, en faisant abstraction des séries exponentielles,

$$\frac{n(n-1)\ldots 1}{(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)} =$$

$$\sqrt{2\pi}\cdot\frac{m^{m+\frac{1}{2}}\,n^{n+\frac{1}{2}}}{e^m\cdot e^n}\cdot\frac{e^{m+n+1}}{(m+n+1)^{m+n+\frac{3}{2}}} =$$

$$e\sqrt{2\pi mn}\cdot\frac{m^m n^n}{(m+n+1)^{m+n+\frac{3}{2}}}.$$

On peut simplifier la dernière de ces expressions en observant que si $p$ est un très-grand nombre par rapport aux nombres $k$ et $l$, on a sensiblement

$$\left(1+\frac{k}{p}\right)^{p+l} = e^k,$$

puisque

$$\left(1+\frac{k}{p}\right)^{p+l} = \left(1+\frac{k}{p}\right)^p\cdot\left(1+\frac{k}{p}\right)^l =$$

$$\left(1+\frac{p}{1}\frac{k}{p}+\frac{p(p-1)}{1.2}\frac{k^2}{p^2}+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\frac{k^3}{p^3}+\text{etc.}\right)\times$$

$$\left(1+\frac{l}{1}\frac{k}{p}+\frac{l(l-1)}{1.2}\frac{k^2}{p^2}+\frac{l(l-1)(l-2)}{1.2.3}\frac{k^3}{p^3}+\text{etc.}\right)$$

et que, si on passe aux limites des différens termes de

ces séries, en supposant $p$ infini, la première devient

$$1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{1.2}+\frac{k^3}{1.2.3}+\text{etc.}=e^k,$$

et la seconde se réduit à son premier terme 1.

Par ce moyen, la quantité

$$(m+n+1)^{m+n+\frac{3}{2}}=$$

$$(m+n)^{m+n+\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1}{m+n}\right)^{m+n+\frac{3}{2}}$$

se change en $(m+n)^{m+n+\frac{3}{2}}e$; la valeur de $S_1^{(m,n)}$ devient donc

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n+1}}\sqrt{\frac{2mn\pi}{m+n}}$$

comme on le voit dans les *Exercices de Calcul intégral*, par M. Legendre (III$^e$ part., p. 348); et il observe avec raison, que l'approximation exige que les nombres $m$ et $n$ soient tous deux très-grands.

2°. On trouve de même que

$$S_1^{(m+p-q,\,n+q)}=$$

$$\frac{(n+q)(n+q-1)\ldots.1}{(m+p-q+1)(m+p-q+2)\ldots.(m+n+p+1)}=$$

$$\sqrt{2\pi}.\frac{(m+p-q)^{m+p-q+\frac{1}{2}}(n+q)^{n+q+\frac{1}{2}}}{e^{m+p-q}.e^{n+q}}\times$$

$$\frac{e^{m+n+p+1}}{(m+n+p+1)^{m+n+p+\frac{3}{2}}};$$

et comme on suppose que les nombres $m$ et $n$ sont très-grands, par rapport aux nombres $p$ et $q$, on peut réduire

$$(m+p-q)^{m+p-q+\frac{1}{2}} = m^{m+p-q+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{p-q}{m}\right)^{m+p-q+\frac{1}{2}}$$

à $m^{m+p-q+\frac{1}{2}} e^{p-q}$, et ainsi des autres: il vient alors

$$\sqrt{2\pi}.\frac{m^{m+p-q+\frac{1}{2}}\, n^{n+q+\frac{1}{2}}}{(m+n)^{m+n+p+\frac{3}{2}}};$$

valeur qui, divisée par celle de $S_1^{(m,n)}$ obtenue précédemment, donne pour quotient

$$\frac{m^{p-q}\, n^q}{(m+n)^p}.$$

C'est à peu près ainsi que M. Laplace a démontré dans le tome VI des *Mémoires des Savans Etrangers* (p. 625), la proposition énoncée à la fin du n° 85.

# NOTE II.

*Sur le n° 43, page 66.*

Le calcul aux différences (finies) auquel se lie assez naturellement la théorie des combinaisons, facilite très-souvent la mise en équation des problèmes relatifs aux probabilités. Déjà Moivre en cherchant la loi que suivent les valeurs successives des fonctions qui résolvent ces problèmes, avait introduit la considération des séries récurrentes; mais l'algorithme du calcul aux différences n'étant pas encore complet et l'intégration des équations de ce genre n'ayant été effectuée d'une manière bien explicite que par Lagrange en 1759 (*), Moivre ne pouvait pas remonter immédiatement à l'expression finie des fonctions à déterminer. C'est M. Laplace qui a fait le premier, en 1773, l'application explicite du calcul aux différences à celui des probabilités; et Lagrange qui, dès 1759, avait indiqué cette application, l'ayant reprise en 1775, a résolu par le même moyen les plus importantes et les plus difficiles des questions que Moivre avait traitées dans la *Doctrine des Chances* (**). Je ne puis donner ici qu'une idée de cette méthode, et je l'appliquerai d'abord à la question du n° cité.

Désignons par $I_m$ le nombre des combinaisons impaires dont $m$ pièces sont susceptibles, par $P_m$ celui des combinaisons paires, et cherchons ce que deviennent ces fonctions de $m$, quand cette variable augmente de l'u-

(*) *Miscellanea Taurinensia*, tom. I, pag. 33.

(**) *Mémoire des Savans Etrangers*, tom. VII, 1773, p. 113, *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1775, pag. 240.

nité. Il est visible que si on introduit la nouvelle pièce dans les combinaisons paires, elle les rendra impaires, et que de plus, prise seule, elle en formera une de cette espèce, ce qui donnera par conséquent $P_m + 1$, combinaisons impaires outre les $I_m$ du cas précédent. Quant aux combinaisons impaires, l'addition de la nouvelle pièce les rendra paires, et le nombre des combinaisons de cette espèce qui était $P_m$ sera augmenté de $I_m$; mais $I_{m+1}$ et $P_{m+1}$ étant les nouvelles valeurs des fonctions $I_m$ et $P_m$, il en résultera les équations

$$I_{m+1} = I_m + P_m + 1, \qquad P_{m+1} = P_m + I_m.$$

En vertu de la seconde, la première devient

$$I_{m+1} = P_{m+1} + 1,$$

et, si on diminue $m$ de l'unité, donne

$$I_m = P_m + 1;$$

au moyen de quoi chassant $P_m + 1$, de la première équation, on obtient

$$I_{m+1} = 2I_m,$$

équation du premier degré et du premier ordre à coefficiens constans, et à laquelle on satisfait en posant $I_m = A\alpha^m$. Le coefficient $A$ reste arbitraire, et l'on trouve $\alpha = 2$, d'où $I_m = 2^m A$; mais comme $I_m$ doit se réduire à 1, quand $m = 1$, il faut que $A = \frac{1}{2}$ : on a donc $I_m = 2^{m-1}$, et par conséquent $P_m = I_m - 1 = 2^{m-1} - 1$. On conclut de là les probabilités

$$\frac{I_m}{I_m + P_m} = \frac{2^{m-1}}{2^m - 1}, \qquad \frac{P_m}{I_m + P_m} = \frac{2^{m-1} - 1}{2^m - 1},$$

comme dans le n° 43; mais de plus cette analyse fait

bien voir comment il arrive que le nombre des combinaisons impaires doit surpasser de l'unité celui des combinaisons paires, ce qui n'avait pas été aperçu par Mairan qui s'occupa le premier de ce problème (*).

2°. La question précédente ne dépendait que d'une équation aux différences à deux variables ; mais on est conduit fréquemment à des équations aux différences partielles : *la détermination de la probabilité d'amener au moins un nombre donné de fois, dans un nombre donné d'épreuves, un événement désigné*, en offre un exemple. C'est le premier problème résolu par Lagrange, dans le Mémoire cité ; et voici comment il le met en équation. A l'exemple de Montmort, il prend pour inconnue le *sort* du joueur, c'est-à-dire son espérance mathématique; mais il suppose égale à l'unité la somme espérée, ce qui réduit le sort du joueur à la probabilité de gagner. D'après cette définition il s'appuie sur le principe, que le *sort d'un joueur, à un coup quelconque, se compose de la réunion des divers résultats que peut amener ce coup, multipliés par la probabilité de les obtenir.* S'agit-il, par exemple, d'amener au moins une fois le point 6 en deux jets d'un dé ordinaire ; le sort du joueur avant de jouer se compose de la probabilité $\frac{1}{6}$ de gagner au premier coup la somme 1, et de la probabilité $\frac{5}{6}$ de ne pas gagner à ce coup, mais d'avoir la probabilité $\frac{1}{6}$ de gagner 1 au second coup ; ce qui fait en tout

$$\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot 1=\frac{11}{36},$$

comme on le trouverait par la formule $\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)^2$ (20).

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1728, p. 53 de l'*Histoire*.

Cela posé, en représentant par $y_{x,t}$ le sort du joueur lorsqu'il ne lui reste plus qu'un nombre $x$ d'épreuves à tenter, et qu'il manque encore un nombre $t$ de répétitions de l'événement désigné dont la probabilité est $e$, on formera l'équation

$$y_{x,t} = e y_{x-1,t-1} + (1-e) y_{x-1,t},$$

$y_{x-1,t-1}$ indiquant le sort du joueur au coup suivant, lorsqu'il a amené l'événement demandé, et $y_{x-1,t}$ lorsqu'il ne l'a pas amené.

Pour l'intégration de cette équation aux différences partielles à trois variables, je renverrai au Mémoire de Lagrange, ou au 3^e volume de mon *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* (in-4°), et je me bornerai à rapporter la valeur de $y_{x,t}$ qui s'en déduit, savoir

$$y_{x,t} = e^t \left\{ 1 + \frac{t}{1}(1-e) + \frac{t(t+1)}{1.2}(1-e)^2 + \ldots\ldots + \frac{t(t+1)\ldots[t+(x-t-1)]}{1.2.3\ldots(x-t)}(1-e)^{x-t} \right\}.$$

Lorsque $x=p$, $t=r$, $1-e=f$, il en résulte

$$y_{p,r} = e^r \left\{ 1 + \frac{r}{1} f + \frac{r(r+1)}{1.2} f^2 + \text{etc.} \right\}$$

pour la probabilité d'amener, dans un nombre $p$ d'épreuves, au moins $r$ fois l'événement désigné.

Par la formule du n° 22, en faisant $p-q=r$, et mettant $e^r$ en facteur commun, on trouverait

$$e^r \left\{ e^{p-r} + \frac{p}{1} e^{p-r-1} f + \frac{p(p-1)}{1.2} e^{p-r-2} f^2 + \text{etc.} \right\};$$

puis substituant les puissances de $1-f$ à celles de $e$

qui sont entre les accolades, on retomberait sur la formule précédente, que Moivre avait trouvée par induction (*).

*Sur le n° 54, page 83.*

Voici le développement de la solution que M. Laplace donne de la même question, dans sa *Théorie analytique des Probabilités*, page 191. En conservant les dénominations que j'ai employées dans le n° cité, il peut se présenter à un tirage l'un quelconque des

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots.i}$$

arrangemens des $m$ numéros en nombre $i$; la liste de $n$ tirages sera donc formée d'un nombre $n$ de ces arrangemens, pris sur un nombre total

$$\left\{\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-i+1)}{1.2\ldots.i}\right\}^n,$$

et comprendra en tout $in$ numéros. Soit maintenant $z_{m,q}$ le nombre de ces mêmes arrangemens, dans lesquels il ne manque aucun des numéros $1, 2, 3, \ldots q$, $z_{m,q-1}$ le nombre des arrangemens, où il ne manque aucun des numéros $1, 2, 3, \ldots q-1$; ce dernier surpassera évidemment le premier, puisqu'outre les arrangemens qui comprennent les n$^{os}$ $1, 2, 3, \ldots q-1$, combinés avec le nombre $q$, il renferme aussi ceux où ce numéro manque, et qui ne sauraient faire partie de $z_{m,q}$. Mais les arrangemens où le n° $q$ manque pouvant résulter d'une loterie composée seulement de $m-1$ numéros, leur nombre est représenté par $z_{m-1,q-1}$; on

(*) *Doctrine of chances*, pag. 13.

aura donc l'équation

$$z_{m,q} = z_{m,q-1} - z_{m-1,q-1} = \Delta z_{m-1,q-1};$$

la différence $\Delta$ étant prise par rapport à $m$ seulement.

Au lieu d'intégrer cette équation, on peut s'en servir pour dériver successivement de $z_{m,1}$ les valeurs de $z_{m,2}$, $z_{m,3}$, etc.; car elle donne

$$\begin{aligned} z_{m,2} &= z_{m,1} - z_{m-1,1} &&= \Delta z_{m-1,1}, \\ z_{m,3} &= z_{m,2} - z_{m-1,2} &&= \Delta z_{m-1,2} = \Delta^2 z_{m-2,1}, \\ z_{m,4} &= z_{m,3} - z_{m-1,3} &&= \Delta z_{m-1,3} = \Delta^3 z_{m-3,1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où l'on conclut aisément

$$z_{m,q} = \Delta^{q-1} z_{m-q+1,1}.$$

Or, $z_{m,1}$, ou le nombre des arrangemens dans lesquels ne manque point le nombre 1, étant égal au nombre total des arrangemens que comporte la loterie proposée, diminué du nombre total de ceux qui résulteraient d'une loterie composée seulement des $m-1$ numéros autres que 1, sera, d'après ce qu'on a dit au commencement de cet article,

$$\left\{\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i}\right\}^n - \left\{\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-i)}{1.2.3\ldots i}\right\}^n$$
$$= \frac{\Delta.\{(m-1)(m-2)\ldots(m-i)\}^n}{(1.2.3\ldots i)^n}:$$

changeant donc $m$ en $m-q+1$ dans cette expression, pour la substituer dans celle de $z_{m,q}$, trouvée plus haut, on aura

$$z_{m,q} = \frac{\Delta^q.\{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-i-q+1)\}^n}{(1.2.3\ldots i)^n},$$

en n'oubliant pas que la différence indiquée ne se rapporte qu'à $m$.

On peut poser, pour abréger, $m - q = s$, ce qui donnera

$$z_{m,q} = \frac{\Delta^q . \{s(s-1)\ldots(s-i+1)\}^n}{(1.2.3\ldots i)^n},$$

différencier par rapport à $s$, et faire ensuite $s = 0$, si l'on veut prendre $q = m$, afin d'avoir le nombre d'arrangemens ou de listes d'après lesquels tous les numéros sont sortis : alors la probabilité demandée sera exprimée par

$$\frac{z_{m,q}}{\left\{\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{1.2.3\ldots i}\right\}^n}$$
$$= \frac{\Delta^q . \{s(s-1)\ldots(s-i+1)\}^n}{\{m(m-1)\ldots(m-i+1)\}^n}.$$

*Sur le n° 59, page 98.*

Ce problème de la durée des parties jouées en *rabattant* peut, dans son état le plus général, s'énoncer ainsi : *deux joueurs, ayant chacun un certain nombre de jetons, jouent ensemble à cette condition, que celui qui perdra une partie donnera un jeton à l'autre ; on demande combien il y a à parier que le jeu, qui peut durer à l'infini, sera fini en un certain nombre de parties au plus, ensorte que l'un des deux joueurs aura gagné tous les jetons de l'autre* (p. 269 du *Mémoire* de Lagrange)? Voici comment il se met en équation. Si on désigne par $x$ le nombre des coups qui restent à jouer, par $t$ le nombre de jetons que possède alors l'un des joueurs, on aura, d'après le principe rappelé au com-

mencement de cette note (p. 279), $y_{x,t}$ étant le sort de ce joueur, et $e$ la probabilité de gagner la partie,

$$y_{x,t} = e y_{x-1,t+1} + (1-e) y_{x-1,t-1},$$

la même équation que celle du problème VI de Lagrange (p. 261 de son *Mémoire*), où il ne considère qu'un seul joueur pariant d'amener un événement désigné, $b$ fois de plus que l'événement contraire, ou $c$ fois de moins. Suivant l'énoncé rapporté plus haut, $b$ représente le nombre de jetons du second joueur, $c$ celui des jetons du premier; et le jeu finit lorsque $x$ étant égal à zéro, $t = c + b$, ce qui fait gagner le premier joueur, ou lorsque $t = 0$, ce qui fait gagner le second.

Si les deux joueurs avaient chacun le même nombre de jetons et que $e$ fût égal à $\frac{1}{2}$, le problème deviendrait alors le même que celui dont j'ai indiqué les cas les plus simples, à l'article cité.

# NOTE III.

*Sur le n° 70, page 114.*

En désignant par $dx$ l'accroissement du capital, on a sur-le-champ $\frac{kdx}{x}$ pour la mesure de l'importance de cet accroissement; en intégrant, il vient $klx + const.$, et si l'on détermine la constante pour que ce résultat s'évanouisse lorsque $x = a$, on obtiendra

$$k(\text{l}\,x - \text{l}\,a) = k\,\text{l}\,\frac{x}{a}.$$

*Sur le n° 82, page 137.*

1°. Si l'on représente par $dx$ les parties dans lesquelles on conçoit que l'unité est divisée, la somme que l'on cherche sera exprimée par

$$\int x^m dx\,(1 - x)^n.$$

L'intégration par parties appliquée au facteur $x^m dx$, donne d'abord

$$\frac{x^{m+1}(1-x)^n}{m+1} + \frac{n}{m+1}\int x^{m+1} dx\,(1-x)^{n-1};$$

en répétant cette opération un nombre $n$ de fois, on fait disparaître le facteur $1 - x$, et on obtient la formule de la page 139.

La formule désignée par

$$S_b^{(m,\,n)} - S_a^{(m,\,n)}$$

dans le texte, équivaut à l'intégrale

$$\int x^m dx\,(1-x)^n$$

prise depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$; et la probabilité d'obtenir, sur un nombre $p$ d'épreuves nouvelles, $p-q$ événemens $A$ et $q$ événemens $B$ (85), sera

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{1.2.3\ldots q}\times\frac{\int x^{m+p-q}dx\,(1-x)^{n+q}}{\int x^m dx\,(1-x)^n},$$

les intégrales étant prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$.

2°. La considération des valeurs moyennes (87) conduit très-simplement aux intégrales; car $dx$ étant l'accroissement des valeurs de $x$, le nombre de ces valeurs comprises dans l'unité, sera $\frac{1}{dx}$, et la valeur moyenne résultante de toutes celles que prend dans cet intervalle, la fonction $x^m(1-x)^n$, sera égale à la somme des valeurs successives de cette fonction, divisée par $\frac{1}{dx}$, c'est-à-dire à

$$\frac{\int x^m(1-x)^n}{\frac{1}{dx}}=\int x^m dx\,(1-x)^n.$$

Sur ce pied la probabilité d'un nouvel événement $A$, et celle d'un nouvel événement $B$, deviennent

$$\frac{\int x^{m+1}dx\,(1-x)^n}{\int x^m dx\,(1-x)^n},\qquad \frac{\int x^m dx\,(1-x)^{n+1}}{\int x^m dx\,(1-x)^n};$$

et l'on voit que leur somme est égale à l'unité, puisque toutes ces intégrales sont prises entre les mêmes limites, $x=0$ et $x=1$.

Nous ferons observer ici en passant, qu'en général

$$\frac{\int y\,dx}{b-a},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, exprime la valeur moyenne entre toutes celles que l'ordonnée $y$ d'une courbe peut recevoir depuis l'abscisse $a$ jusqu'à l'abscisse $b$.

*Sur le n° 93, page 158.*

1°. Suivant la notation du calcul intégral, la probabilité indiquée dans cet article a pour expression la valeur de l'intégrale $\int x^m dx(1-x)^n$, prise entre les limites $x=a$, $x=b$, divisée par sa valeur prise entre les limites $x=0$ et $x=1$; cette dernière ayant déjà été trouvée ci-dessus (p. 275), je vais chercher la première, pour laquelle

$$a=\frac{m}{m+n}-c\,,\quad b=\frac{m}{m+n}+c,$$

et faire en conséquence

$$x=\frac{m}{m+n}+z,\quad \text{d'où}\quad 1-x=\frac{n}{m+n}-z,$$

ce qui donnera

$$\int x^m dx(1-x)^n=\int dz\left(\frac{m}{r}+z\right)^m\left(\frac{n}{r}-z\right)^n,$$

si, pour abréger on pose $m+n=r$; et les limites de $z$ seront $-c$ et $+c$.

On peut d'abord penser à développer cette transformée, suivant les puissances de $z$, en l'écrivant ainsi :

$$\frac{m^m n^n}{r^{m+n}} \int dz \left(1+\frac{rz}{m}\right)^m \left(1-\frac{rz}{n}\right)^n;$$

mais en la convertissant en exponentielle, on parvient à un résultat plus simple. Pour cela, on observe que

$$\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m = e^{m\,l\left(1+\frac{rz}{m}\right)},$$

et développant le logarithme indiqué, on trouve

$$\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m = e^{rz-\frac{r^2z^2}{2m}+\frac{r^3z^3}{3m^2}-\text{etc.}};$$

de même

$$\left(1-\frac{rz}{n}\right)^n = e^{-rz-\frac{r^2z^2}{2n}-\frac{r^3z^3}{3n^2}-\text{etc.}}.$$

Cela posé, si l'on néglige le terme affecté de $z^3$ et les suivans, ce dont nous verrons bientôt la possibilité, quand $m$ et $n$ sont de grands nombres, l'intégrale cherchée sera réduite à

$$\int e^{-\frac{r^2z^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} dz = \int e^{-\frac{r^3z^2}{2mn}} dz;$$

faisant alors

$$\frac{r^3z^2}{2mn} = t^2, \quad \text{d'où} \quad z = t\sqrt{\frac{2mn}{r^3}},$$

elle se change en

$$\sqrt{\frac{2mn}{r^3}} \int e^{-t^2} dt;$$

et les limites de $z$ étant $-c$ et $+c$, celles de $t$ seront

$$t = -c\sqrt{\frac{r^3}{2mn}}, \quad t = +c\sqrt{\frac{r^3}{2mn}}:$$

mais, à cause que la fonction $e^{-t^2}$ demeure la même, quel que soit le signe de $t$, il suffira de prendre l'intégrale précédente, depuis $t=0$, jusqu'à........ $t = c\sqrt{\frac{r^3}{2mn}}$, et de doubler la valeur obtenue ainsi. Par ce moyen on aura

$$\int x^m dx\,(1-x)^n = \frac{m^m n^n}{r^{m+n}}\cdot 2\sqrt{\frac{2mn}{r^3}}\int e^{-t^2}dt;$$

et divisant ce résultat par

$$\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n+1}}\sqrt{\frac{2\pi mn}{m+n}},$$

valeur approchée de l'intégrale $\int x^m dx\,(1-x)^n$, prise entre les limites $x=0$ et $x=1$ (p. 275), on aura pour la probabilité cherchée

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-t^2}dt.$$

C'est donc de la valeur de $\int e^{-t^2}dt$, entre les limites indiquées ci-dessus, que dépend en dernier résultat l'approximation demandée; or cette intégrale prise depuis $t=0$ jusqu'à $t$ infini, est seulement, comme on le verra plus bas, $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, et elle en approche beaucoup, dès que $t$ devient un peu considérable, parce que la fonc-

tion $e^{-t^2}$ décroît alors avec une rapidité de plus en plus grande. Il suit de là que la valeur de la probabilité cherchée, tend continuellement vers l'unité, et qu'elle en approche d'autant plus, que la limite

$$t = c\sqrt{\frac{r^3}{2mn}}$$

est plus considérable. Mais pour qu'il en soit ainsi, il faut que $c$ surpasse beaucoup $\frac{1}{\sqrt{r}}$, car $\sqrt{\frac{r^3}{2mn}}$ étant $\sqrt{r} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{2mn}}$, la quantité $\frac{r^2}{2mn}$, dans son minimum qui répond à $m = n$, se réduit à 2.

D'un autre côté, pour qu'il soit permis de négliger le terme $\frac{r^3z^3}{3m^2}$ dans la série exponentielle du développement de $\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m$ (p. 288), il faut qu'en y faisant $z=c$, ce terme demeure fort petit. Or, en mettant à part le facteur $\frac{r^2}{3m^2}$ qui ne peut pas tomber au-dessous de $\frac{1}{3}$, il reste le facteur $rz^3$ qui, devenant $rc^3$ à la limite de l'intégrale, et se changeant en $r^{1-\frac{3}{s}}$, lorsqu'on fait $c = \frac{1}{\sqrt[s]{r}}$, prendra un exposant négatif, si $\frac{3}{s} > 1$. Joignant cette condition avec la précédente, on en conclura que pour obtenir l'approximation supposée, $c$ doit être entre $\frac{1}{\sqrt{r}}$ et $\frac{1}{\sqrt[3]{r}}$; que par conséquent plus $r$ sera considérable, toutes choses d'ailleurs égales, plus on pourra prendre $c$ petit, et que moins on réduira

la valeur de $c$, plus la limite de $t$ deviendra grande, plus alors la probabilité cherchée approchera de l'unité.

2°. La valeur complète $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ de l'intégrale $\int e^{-t^2}dt$, qui s'est déjà présentée plus haut (p. 273), se déduit aisément de l'équation

$$\left(\int\frac{x^{2r}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)\left(\int\frac{x^{2r+1}dx}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

rapportée à la fin de mon *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, et dans laquelle les intégrales sont prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Si l'on fait, dans cette équation $x=e^{-qt^2}$, elle devient

$$4q^2\left\{\int\frac{tdte^{-qt^2}.e^{-2qrt^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}}\right\}\left\{\int\frac{tdte^{-qt^2}.e^{-q(2r+1)t^2}}{\sqrt{1-e^{-2qt^2}}}\right\}$$
$$=\frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\pi}{2},$$

les limites de $t$ étant l'infini négatif et zéro. Posant ensuite $q(2r+1)=1$, mettant dans le second membre la valeur de $2r+1$, tous les deux deviennent divisibles par $q$, puis divisant sous les radicaux par $2q$, on obtient

$$2\left\{\int\frac{tdte^{-t^2}}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}}\right\}\left\{\int\frac{tdte^{-t^2(1+q)}}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}}\right\}=\frac{\pi}{2};$$

et comme la limite de $\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}$, lorsqu'on y fait $q=0$;

est $t^2$, l'équation précédente se réduit alors à

$$2\left[\int e^{-t^2}dt\right]^2 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{d'où} \quad \int e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

La valeur de cette intégrale étant la même pour les $t$ négatifs, comme pour les $t$ positifs, on peut aux limites $t = -$ infini et $t = 0$, substituer $t = 0$ et $t =$ infini qui se succèdent dans le même ordre, par rapport à l'accroissement de la variable $t$.

En substituant à $e^{-t^2}$ son développement suivant les puissances ascendantes de $t$, et en intégrant, on forme une série qui donne la valeur de $\int e \quad dt$, lorsque la limite de $t$ n'est pas un grand nombre; mais dans le cas contraire, il faut chercher une série descendante qui s'obtient en faisant attention que

$$\int e^{-t^2}dt = \int \frac{1}{t} \cdot e^{-t^2}\, t dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} e^{-t^2},$$

et en continuant cette intégration par parties sur le facteur $e^{-t^2}$, après avoir multiplié et divisé par $t$. On trouve de cette manière le développement

$$\int e^{-t^2}dt = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{3}{2^2 t^4} - \frac{3.5}{2^3 t^6} + \text{etc.}\right\},$$

qui, s'évanouissant lorsque $t$ est infini, donne depuis $t = T$ jusqu'à $t$ infini,

$$\frac{1}{2Te^{T^2}}\left\{1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{3}{2^2T^4} - \frac{3.5}{2^3T^6} + \text{etc.}\right\}.$$

Retranchant ce résultat de $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, on aura la valeur de $\int e^{-t^2}dt$ depuis $t = 0$, jusqu'à $t = T$.

La série ci-dessus cesse d'être convergente, mais d'autant plus tard que $T$ est plus grand; et comme ses termes sont alternativement positifs et négatifs, elle donne jusques-là des limites très-resserrées de la valeur que l'on cherche.

3°. Dans la transformation précéd. de $\int x^m dx(1-x)^n$ en $\int e^{-t^2}dt$, nous n'avons employé que les premiers termes de la série exponentielle en $z$ (p. 288); il est cependant possible d'avoir égard aux autres, en faisant d'abord égal à $-t^2$, l'exposant de $e$ dans le produit des développemens de $\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m$ et de $\left(1-\frac{rz}{n}\right)^n$, ce qui donne

$$-\frac{r^2z^2}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)+\frac{r^3z^3}{3}\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)-\text{etc.}=-t^2,$$

ou bien,

$$\frac{r^3z^2}{2mn}+\frac{r^4z^3(m-n)}{3m^2n^2}+\text{etc.}=t^2,$$

en changeant les signes, réduisant et observant que $n^2-m^2=-r(m-n)$. On déduira d'abord de cette équation les limites de $t$ au moyen de celles de $z$; ensuite on y fera

$$z=At+Bt^2+Ct^3+\text{etc.},$$

pour obtenir $dz$; et les coefficiens $A$, $B$, $C$, etc. se détermineront à l'ordinaire en établissant l'identité des deux membres : on aura ensuite

$$\int x^m dx(1-x)^n=\frac{m^m n^n}{r^{m+n}}\int dz\left(1+\frac{rz}{m}\right)^m\left(1-\frac{rz}{n}\right)^n=$$

$$\frac{m^m n^n}{r^{m+n}}\int e^{-t^2}dt\,\{A+2Bt+3Ct^2+\text{etc.}\}.$$

Lorsque la variable $t$ doit être comprise entre des limites positive et négative de même grandeur, on simplifie le calcul, en séparant l'intégrale en deux parties, l'une embrassant les valeurs positives de $t$, et l'autre les valeurs négatives; car ayant d'une part

$$\int e^{-t^2}dt\,\{A + 2Bt + 3Ct^2 + \text{etc.}\},$$

de l'autre

$$-\int e^{-t^2}dt\,\{A - 2Bt + 3Ct^2 - \text{etc.}\},$$

et retranchant le second résultat du premier, on obtient

$$\int x^m dx\,(1-x)^n = \frac{m^m n^n}{r^{m+n}} \cdot 2\int e^{-t^2}dt\,\{A + 3Ct^2 + \text{etc.}\}.$$

Dans le cas particulier que nous examinons, les limites de $t$ ne pourraient être supposées de même grandeur, qu'autant qu'on négligerait les puissances de $z$ supérieures à la seconde; mais s'il s'agissait d'obtenir l'intégrale $\int x^m dx\,(1-x)^n$, entre les limites $x = 0$ et $x = 1$, cela reviendrait à supposer nuls alternativement les facteurs

$$1 + \frac{rz}{m} \quad \text{et} \quad 1 - \frac{rz}{n} \quad \text{ou la fonction} \quad e^{-t^2},$$

et par conséquent assigner à $t$ pour limites l'infini positif et l'infini négatif. Dans ce cas on a, depuis $t = 0$ jusqu'à $t$ infini, $\int e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; on en conclut aisément, au moyen de l'intégration par parties,

$$\int e^{-t^2}t^2dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2}t + \frac{1}{2}\int e^{-t^2}dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

$$\int e^{-t^2}t^4dt = -\frac{1}{2}e^{-t^2}t^3 + \frac{3}{2}\int e^{-t^2}t^2dt = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \text{etc.},$$

d'où

$$\int x^m dx(1-x)^n = \frac{m^m n^n}{r^{m+n}} \sqrt{\pi} \left\{ A + \frac{3}{2} C + \frac{3.5}{2.2} E + \text{etc.} \right\};$$

et si on fait le calcul indiqué pag. 293 pour obtenir les coefficiens du développement de $z$ en $t$, on trouvera

$$A = \sqrt{\frac{2mn}{r^3}},$$

$$B = \frac{2}{3} \frac{n-m}{r^2},$$

$$C = \frac{m^2 - 11mn + n^2}{18rmn} A,$$

etc.

En se bornant au premier terme, on a précisément la valeur approchée de $\int x^m dx\,(1-x)^n$ déduite de la formule d'Euler, p. 275.

Dans ce qui précède, j'ai suivi en grande partie la marche tracée par M. Laplace dans le premier Mémoire qu'il a publié sur le Calcul des Probabilités, *Savans Etrangers*, t. VI, p. 626, et par M. Legendre, dans la troisième partie de ses *Exercices de Calcul intégral*, p. 343 (*)

(*) Ceux qui voudront suivre dans ses progrès, la théorie des approximations pour les formules de grands nombres, devront consulter d'abord le *Tractatus de summatione et interpolatione serierum*, de Stirling, p. 135, les *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, de Moivre, pag. 4 du Supplément, et passer au *Calcul différentiel* d'Euler, 2e part., chap. VI, puis aux *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour les années 1778, pag. 227, 1782, pag. 1, et 1783, pag. 423, et enfin à la *Théorie analytique des Probabilités*, livre Ier, 2e partie.

*Sur le n° 121, page 207.*

1°. Si l'on conçoit que la rente $s$ se paie par portions égales à $sdx$, $x$ désignant le tems écoulé depuis l'origine du placement, qu'on représente par $z$ la probabilité que l'individu qui l'a fait existera au bout du tems $x$, enfin que, pour abréger, on fasse $1+t=q$, la somme $sdx$ rapportée à l'origine de ce tems, et multipliée par la probabilité de la payer, deviendra

$$\frac{szdx}{q^x} \quad \text{d'où} \quad S=s\int\frac{zdx}{q^x},$$

et l'intégrale devra être prise depuis $x=0$, jusqu'à l'âge le plus avancé de la table de mortalité.

Ce qui précède suppose qu'on ait l'expression algébrique de la loi de mortalité, ou l'équation de la courbe qui représente cette loi (106). Soit $y=f(x)$ cette équation, $y$ étant le nombre de vivans à l'âge $x$ compté depuis la naissance; pour transporter l'origine des $x$ à l'âge $a$, il suffira d'écrire $a+x$, au lieu de $x$, ce qui donnera $y=f(a+x)$; or le nombre des vivans de l'âge $a$ étant $f(a)$, on aura

$$z=\frac{f(a+x)}{f(a)} \quad \text{et} \quad S=\frac{s}{f(a)}\int\frac{dxf(a+x)}{q^x}.$$

On peut laisser partir la variable $x$ de la naissance, en écrivant seulement $q^{x-a}$, au lieu de $q^x$, et la formule ci-dessus devient

$$S=\frac{s}{f(a)}\int\frac{dxf(x)}{q^{x-a}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=a$, jusqu'à la fin de la table de mortalité.

2°. Si la rente ne devait commencer à courir qu'un nombre $n$ d'années après l'époque du placement, $a$ étant l'âge auquel il s'est fait, la valeur du capital serait encore

$$S = \frac{s}{f(a)} \int \frac{dx f(x)}{q^{x-a}};$$

mais l'intégrale ne devrait commencer qu'à $x = a + n$, parce qu'il faut en retrancher toute la partie qui précède le premier paiement de la rente.

L'application de ces expressions, soit à la formule de Lambert, soit à l'hypothèse de Moivre, rapportées dans le n° 106, est trop facile pour s'y arrêter; je me bornerai donc à faire observer que l'introduction de la loi de continuité, distribuant les décès et les paiemens sur tous les instans de l'âge, convient mieux que toute autre hypothèse, au cas où le banquier s'engage à payer aux héritiers, la portion de rente échue depuis le décès du rentier, mais elle change un peu le produit de l'intérêt de l'argent, parce que, dans la pratique, on n'obtient pas, pour de petits intervalles de tems, l'intérêt composé, mais l'intérêt simple.

3°. En substituant les différences aux différentielles, on mettra tel intervalle qu'on voudra entre les paiemens; car alors on pourra calculer la somme de la suite des valeurs de l'expression

$$\frac{sf(x)}{f(a)q^{x-a}},$$

à partir de $x = a$, en faisant croître $x$ de la différence $h$ assignée pour l'intervalle de deux paiemens: Cette somme dépend, comme on sait de l'intégrale

$$\frac{1}{f(a)} \Sigma \frac{sf(x)}{q^{x-a}};$$

et l'on obtiendrait son développement, par la série sommatoire d'Euler, citée page 272, en y faisant..... $u = \frac{s\,\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}(a)q^{x-a}}$. C'est à peu près ainsi que M. Laplace traite ce sujet dans la *Théorie analytique des Probabilités*, p. 426.

*Sur le n° 144, page 243.*

La formule de cet article revient à

$$\frac{\int x^p dx\,(1-x)^q}{\int x^p dx\,(1-x)^q + \int x^q dx\,(1-x)^p},$$

les intégrales étant prises depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$.

Quand $a=\frac{1}{2}$ et $b=1$, on peut changer $\int x^q dx(1-x)^p$ en $\int x^p dx(1-x)^q$, pourvu qu'on prenne cette dernière depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$; car si l'on fait $x=1-z$, il vient

$$\int x^q dx\,(1-x)^p = -\int z^p dz\,(1-z)^q,$$

entre les limites $z=\frac{1}{2}$, $z=0$, et par conséquent $\int z^p dz\,(1-z)^q$ ou $\int x^p dx\,(1-x)^q$, lorsqu'on renverse les limites, c'est-à-dire qu'on intègre depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$.

Dans ce cas, le dénominateur de la probabilité indiquée ci-dessus, devenant la somme des valeurs de la même intégrale $\int x^p dx\,(1-x)^q$, prise d'abord depuis $x=\frac{1}{2}$ jusqu'à $x=1$, et ensuite depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{1}{2}$, est la même chose que l'intégrale entière, depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$ : la probabilité dont il s'agit revient donc à

$$\frac{\int x^p dx\,(1-x)^q}{\int x^p dx\,(1-x)^q},$$

l'intégrale du numérateur étant prise depuis $x = \frac{1}{2}$ jusqu'à $x = 1$, et celle du dénominateur, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. C'est précisément l'expression que donne M. Laplace, pag. 33 du *Supplément* qu'il vient d'ajouter à sa *Théorie analytique des Probabilités*, et qui n'avait pas encore paru lors de l'impression de l'article auquel se rapporte ce qui précède.

FIN.

## ADDITIONS ET CORRECTIONS.

*Page* 35, *avant* le n° 24. La difficulté proposée par le chevalier de Méré, n'est pas la seule qu'on ait élevée contre l'évaluation des probabilités dans les épreuves répétées. Elle ne reposait que sur son ignorance du calcul qui lui faisait regarder comme proportionnels des nombres qui ne pouvaient l'être ; mais d'Alembert a voulu jeter du doute sur les principes eux-mêmes. L'exposition et la réfutation d'une seule de ses objections suffira pour les faire apprécier toutes, car elles n'ont obtenu l'assentiment d'aucun géomètre distingué ; elles prouvent seulement qu'il peut arriver aux hommes le plus justement célèbres, de s'égarer même dans un sujet fort simple.

Suivant d'Alembert, lorsqu'on jette un dé à deux faces que je désignerai par $A$ et $B$, le pari d'amener la face $A$ au moins une fois en deux coups, n'a en sa faveur qu'une probabilité $\frac{2}{3}$ au lieu de $\frac{3}{4}$ que donne le principe du n° 20 ; car, dit-il, si l'on amène $A$ du premier coup, le jeu est fini, et si l'on amène au contraire la face $B$, il faudra jouer le second coup qui donnera $A$ ou $B$, ensorte qu'il ne peut réellement arriver que l'un de ces 3 événemens, $A$, $BA$, $BB$, dont 2 font gagner le pari (*) : cela est vrai ; mais l'erreur consiste à supposer aux deux derniers la même possibilité qu'au premier ; elle est du genre de celle qui a été indiquée dans le n° 19.

En effet la probabilité de l'arrivée de $A$ au premier coup est $\frac{1}{2}$ ainsi que celle de $B$ ; mais celle des événemens composés $BA$ et $BB$, qui n'ont lieu qu'au deuxième coup, est, avant le premier coup, $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ ; ainsi le joueur qui parie d'amener $A$ au moins une fois, en a sa faveur, avant ce coup, la probabilité

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4},$$

la même qu'on obtiendrait en embrassant les quatre arrangemens que présentent les deux épreuves combinées ensemble, savoir

$$AA,\ AB,\ BA,\ BB\ (**).$$

(*) *Opuscules mathématiques de d'Alembert*, tom. II, p. 20.

(**) *Essai philosophique sur les Probabilités*, page 13 de la troisième édition in-8°.

En général il est visible qu'il y a le même nombre de chances dans $n$ jets successifs du même dé, et dans le jet simultané de $n$ dés semblables. Il paraît par les lettres de Pascal à Fermat, qu'il était tombé d'abord dans une erreur analogue à celle que nous venons de relever (*).

*Page* 52, *ligne* 19, $\lambda m^{rm-r} n^{rn+r}$, *lisez* $\lambda' m^{rm-r} n^{rn+r}$.

*Page* 70, *ligne* 17, *au numérateur*, $n$ *lisez* $n-1$.

*Page* 71, *ligne* 2 *en remont.*, *après* épuisé, *ajoutez*, puisqu'il n'y a plus d'incertitude sur celui des joueurs qui doit gagner.

*Page* 72, *ligne* 16, *ajoutez*, ces trois fractions composent l'unité (8).

*Page* 80, *à la fin du* n° 52, *ajoutez*, Moivre s'est occupé de ces derniers dans sa *Doctrine of Chances*, pag. 184.

*Page* 102, *ligne* 16, *ajoutez*, $M$ étant ici la mise du joueur qui parie pour $B$, est égale à $rsb(m+n)$.

*Ibid*, *ligne* 17, *ajoutez*,

Cela posé, comme on peut assigner d'abord au nombre $s$ telle valeur qu'on veut, on pourra supposer aussi petits qu'on le voudra les rapports $\frac{1}{sm}$, $\frac{1}{sn}$; et prenant ensuite pour $r$ des nombres de plus en plus considérables, *on obtiendra une probabilité de plus en plus grande, que la somme perdue par l'un quelconque des joueurs et gagnée par l'autre ne surpassera pas une fraction donnée, et aussi petite qu'on le voudra, de leur mise totale.* Il faut d'ailleurs observer que cette somme étant égale à $r(a+b)$, augmente proportionnellement au nombre $r$, et par conséquent à celui des épreuves, exprimé par $rs(m+n)$.

L'accroissement de la probabilité tient à celui du nombre des termes dont se compose l'expression rapportée sur la page 53, à mesure que l'on embrasse un plus grand nombre d'épreuves, et dépend du facteur $r$. Si on supposait ce facteur constant, et qu'on fît croître l'expression $rs(m+n)$ par le facteur $s$, ce qui resserrerait de plus en plus les limites assignées à la distribution des événemens simples, alors l'expression de la probabilité, ne renfermant toujours que le même nombre de termes, diminuerait de valeur, ainsi qu'on l'a dit dans le n° 29, et comme on peut le conclure de la formule de la page 271. Entre ce cas et le précédent, il en doit exister un dans lequel, $r$ et $s$ variant à la fois, et chacun de ces nombres croissant moins rapidement que celui des épreuves, la probabilité demeure constante. La somme $r(a+b)$

(*) *OEuvres de Pascal*, tom. IV, p. 424.

perdue ou gagnée, augmente encore, mais ses rapports $\frac{1}{sm}$, $\frac{1}{sn}$, à la mise totale de chaque joueur, décroissent; et de là résulte que *la même probabilité correspond à une limite de perte ou de gain dont la valeur croît toujours, mais de manière à devenir une fraction d'autant moindre de la mise totale, que l'on doit continuer le jeu plus long-tems.*

*Page* 105, *observation sur le premier alinéa.*

Le calcul n'indique point la diminution des valeurs absolues des différences entre l'état de deux joueurs placés dans des conditions égales, mais seulement la diminution des rapports entre ces différences et le total des sommes risquées par chacun d'eux (*voyez ci-dessus l'addition à la page* 102); cependant on doit observer que si la durée du jeu n'est pas très-considérable, et si les mises sont modiques, les faits examinés en gros peuvent paraître d'accord avec les assertions rapportées dans l'alinéa cité.

*Page* 126, *ligne* 14, 0,434z, *lisez* 0,4342.

*Page* 157, *ligne* 4 *en remont.*, $S^{(m,n)}$, *lisez* $S_{b}^{(m,n)}$.

*Page* 189, *à la fin du n°* 115, *ajoutez en note*, *Essai sur le principe de la population*, *par M. Malthus*, tom. I, p. 6—7 de la traduction française, et tom. II, p. 240 et suiv.

---

De l'Impr. de Mme Ve COURCIER, quai des Augustins, n° 57.



